МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Н.Ю. Філіпова

ІМОВІРНІСНІ ОСНОВИ ОБРОБКИ ДАНИХ

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 171 «Електроніка»,
спеціалізацією «Електронні та інформаційні технології кінематографії та аудіовізуальних систем»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Імовірнісні основи обробки даних: Розрахункова робота [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», спеціалізації «Електронні та інформаційні технології кінематографії та аудіовізуальних систем» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.:Н.Ю. Філіпова. – Електронні текстові данні (1 файл: 1,1 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 101 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 29.03.2018 р.)
за поданням Вченої ради ФЕЛ (протокол № 03/2018 від 26.03.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ІМОВІРНІСНІ ОСНОВИ ОБРОБКИ ДАНИХ

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

Укладачі: *Філіпова Наталія Юріївна*, канд. техн. наук.

Відповідальний редактор *Лазебний В. С.*,доцент, канд..техн.наук., доцент

Рецензенти: *Дрозденко О.І.* , доцент, канд. техн. наук , доцент

Навчальний посібник є збірником задач, а також керівництвом до виконання розрахункової роботи з дисципліни «Ймовірнісні основи обробки даних». Завдяки індивідуальній самостійній роботі у студентів є можливість засвоїти теоретичний матеріал з дисципліни «Ймовірнісні основи обробки даних» спеціальності 171 «Електроніка», спеціалізації «Електронні та інформаційні технології кінематографії та аудіовізуальних систем». В навчальному посібнику представлений набір індивідуальних завдань, надані короткі теоретичні відомості, наведені таблиці значень основних функцій та контрольні питання для теоретичної підготовки до захисту розрахункової роботи.

Вступ

Навчальний посібник до виконання розрахункової роботи складений у відповідності до програми кредитного модуля «Імовірнісні основи обробки даних» підготовки фахівців спеціальності 171 Електроніка спеціалізації «Електронні та інформаційні системи і технології телебачення, кінематографії та звукотехніки » і призначений для студентів денної форми навчання.

Метою розрахункової роботи є в закріплення знань, одержаних студентами під час вивчення кредитного модуля «Імовірнісні основи обробки даних», їх застосуванні для вирішення конкретних практичних завдань із використанням теоретичних знань. Виконання розрахункових робіт сприяє формуванню самостійності у аналізі теоретичних знань та проведених обчислень, дослідженні практичних задач, які є необхідною складовою підвищення технічного рівня підготовки студента.

У вказівках приведені основні теоретичні відомості, перелік завдань для індивідуальної роботи та приклад розв’язування задач. Індивідуальні завдання містять 30 варіантів, по 15 задач в кожному.

При виконанні завдань студент повинний обирає варіант завдання, який співпадає з номером прізвища у навчальному журналі. Розрахункова робота виконується в друкованому виді на аркушах А4. Розвязування всіх задач і пояснення до них повинні бути досить докладними, з наведенням формул, теорем, висновків, що використовуються при рішенні. Всі креслення і графіки повинні бути виконані з використанням програмних засобів. Розрахункова робота пред'являється викладачеві за вимогою й у терміни їхньої здачі.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1.1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Основні поняття

Визначення 1. *Елементарним результатом експерименту є кожен реально зафіксований або теоретично можливий результат експерименту. У відповідність кожному елементарному результату надамо його позначення* ω_i

Визначення 2. *Безліч усіх можливих взаємовиключних результатів* ω_i *у будь-якому експерименті – простір* Ω *елементарних результатів. Таким чином,* $\omega_i \epsilon \Omega$

Визначення 3. *Подією А називається будь-яка підмножина А* ϵ Ω *простору елементарних результатів.*

Визначення 4. *Якщо експеримент закінчився одним з елементарних фіналів* ω_i *, який входить в безліч А:* $\omega_i \epsilon$ *А, то вважається, що подія А наступила.*

Лапласовський метод завдання ймовірності. Безпосереднє обчислення ймовірності

Метод Лапласа завдання ймовірності ґрунтується на припущені про рівно можливі настання будь-якого з кінцевого числа елементарних результатів. Такий підхід вперше виник при обчисленні шансів у азартних іграх.

Нехай Ω *- простір, який складається з* n *елементарних результатів, А – подія, що складається з* m *елементарних результатів (сприяють настанню події А). Ймовірністю події А називається число, що позначається P(A):*

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

З визначення випливає, що $0 \leq P(A) \leq 1,\ P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0.$

Підрахунок чисел n *і* m *елементарних результатів ґрунтується на правилах множення і складання числа способів виконання певних дій.*

Правило множення. *Нехай потрібно виповнить операцію, яка складається з* k *дій, при тому що першу дію можна виповнить* n_1 *способами, другу -* n_2 *способами, і так до* k*-ї дії, яку можна виконати* n_k *способами. Тоді таку операцію можна виконати* $n_1 * n_2 * \dots * n_k$ *способами.*

Правило додавання. *Нехай потрібно виконати операцію, що складається з* k *дії, що взаємно виключають одна одну, причому першу дію можна виконати* n_1 *способами, другу -* n_2 *способами, і так до* k*-ї дії, яку можна виконати* n_k *способами. Тоді таку операцію можна виконати* $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ *способами.*

Елементи комбінаторики

Нехай дано безліч M, що складається з n елементів. сукупність m різних елементів з n називається з'єднанням з n елементів по m. Розрізняють три види з'єднань.

Сполучення

З'єднання з n елементів по m, що відрізняються одного від одного складом, тобто хоча б одним елементом, без урахування упорядкування цих елементів, називаються сполученнями з n елементів по m. Число всіх різних поєднань з n елементів по m позначається C_n^m*:*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}.$$

Властивості сполучень:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$.
2. $C_n^m = C_n^0 = 1$.
3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.
4. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

Розміщення

З'єднання з n елементів по m, що відрізняються один від одного складом або (і) упорядкуванням цих елементів, називаються розміщення з n елементів по m. Число всіх різних розміщень з n елементів по m позначається A_n^m *і дорівнює:*

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

Перестановки

З'єднання, що містять всі n різних елементів, називаються перестановками. Будь-які дві перестановки відрізняються порядком розміщення елементів. Число всіх різних перестановок позначається P_n *і одно* $P_n = n!$*. Можна відзначити, що числа сполучень, перестановок і розміщень зв'язані рівністю* $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n}$.

З'єднання з повтореннями

До сих пір розглядалися з'єднання, в кожне з яких будь-який з n різних елементів даної множини входив не більше одного разу. Тепер будемо *розглядати з'єднання з повтореннями, тобто з'єднання, в кожне з яких будь-який з n різних типів елементом може входити більше одного разу. Надалі будемо вважати, що вихідна безліч M містить n різних типів елементів. З‘єднання з повтореннями з n елементів по m називається множина, складена з m елементів множини M. Очевидно, що число елементів кожного з n типів в такому поєднанні повинно бути не більше ніж m.*

Сполучення з повтореннями

Нехай дано множину M, що складається з n типів елементів. З‘єднання з повтореннями з елементів n типів по m без урахування їх порядку розташування, що відрізняються хоча б одним елементом, називаються поєднаннями з повтореннями з n елементів по m. Число всіх таких сполучень з повтореннями позначається $C_n^m(\text{п})$ *і дорівнює* C_n^m*(n)* $= \text{C}_{n+m-1}^m$.

Розміщення з повтореннями

Нехай дано безліч M, що складається з n- типів елементів. Сполучення з повтореннями з n елементів по m, що відрізняються складом елементів і / або порядком їх розташування, називаються розміщеннями з повтореннями з n елементів по m. Число всіх таких розміщень з повтореннями позначається $A_n^m(\text{п})$ *та дорівнює:*

$$A_n^m(\text{п}) = n^m$$

Перестановки з повтореннями

Нехай дано безліч M, що складається з n типів елементів. Множина, що складається з m_1 *елементів першого типу,* m_2 *елементів другого типу і т.д. до* m_k *елементів к-го типу, причому з* $m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k = n$, *називаються перестановками з повтореннями з n елементів. Число всіх таких перестановок позначається* $P_n(m_1, m_2, \dots m_k)$ *і дорівнює*

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!}.$$

Геометричне визначення ймовірностей

Класична формула ймовірності передбачає кінцеве число елементарних результатів. Однак часто зустрічаються експерименти, що складаються з нескінченного числа елементарних фіналів. Для подолання цієї перешкоди використовується поняття геометричної ймовірності.

Нехай на площині є фігура Ω, яка містить фігуру ω. На фігуру Ω навмання кидається точка. Позначимо через A подію, що полягає в попаданні кинутої точки в фігуру ω, через S (ω) і S (Ω) - площі фігур ω і Ω відповідно. Фігуру, *яка сприяла настанню події А, будемо називати ω. Тоді під ймовірністю події А будемо розуміти відношення даних площ:*

$$P(A) = \frac{S(\omega)}{S(\Omega)}$$

У наведеному вище прикладі розглядалися двовимірні області. Окреслені площі S(ω) і S(Ω) називаються мірами цих областей на площині. Одновимірною областю вважається дуга кривої або відрізок прямої. Мірою одновимірної області є її довжина. Мірою тривимірної (просторової) області є її об`єм. Позначимо m(ω) міру області ω. Виходячи з вище сказаного, можна сформулювати наступне визначення: геометричною ймовірністю події А називається відношення m(ω) - міри області, яка сприяла появі події А, до m(Ω) - міри всієї області.

Приклади:

<u>Завдання 1</u>. У групі 30 студентів. Необхідно вибрати старосту, заступника старости і профорга. Скільки існує способів це зробити?

Рішення. Старостою може бути обраний будь-який з 30 студентів, заступником - будь-який з решти 29, а профоргом - будь-який з решти 28 студентів, тобто n1 = 30, n2 = 29, n3 = 28. За правилом множення загальне число N способів вибору старости, його заступника і профорга одно $N=n_1\times n_2\times n_3=30\times 29\times 28=24360$

<u>Завдання 2</u>. Два листоноші повинні рознести 10 листів по 10 адресами. Скількома способами вони можуть розподілити роботу?

Рішення. Перший лист має n1 = 2 альтернативи - або його відносить до адресата перший листоноша, або другий. Для другого листа також є n2 = 2 альтернативи і т.д., тобто n1 = n2 = ... = n10 = 2. Отже, в силу правила множення загальне число способів розподілів листів між двома листоношами дорівнює:

$$N = n_1 n_2 ... n_{10} = \underbrace{2\times 2\times ...\times 2}_{10\ \text{ðàç}} = 2^{10} = 1024$$

<u>Завдання 3.</u> У ящику 100 деталей, з них 30 - деталей 1-го сорту, 50 - 2-го, решта - 3-го. Скільки існує способів вилучення з ящика одну деталь 1-го або 2-го сорту?

Рішення. Деталь 1-го сорту може бути залучена n1 = 30 способами, 2-го сорту - n2 = 50 способами. За правилом суми існує N = n1 + n2 = 30 + 50 = 80 способів вилучення однієї деталі 1-го або 2-го сорту.

Завдання 4. Порядок виступу 7 учасників конкурсу визначається жеребом. Скільки різних варіантів жеребкування при цьому можливо?

Рішення. Кожен варіант жеребкування відрізняється тільки порядком учасників конкурсу, тобто є перестановкою з 7 елементів. Їх число дорівнює

$$P_7 = 7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040.$$

Завдання 5. У конкурсі по 5 номінаціях беруть участь 10 кінофільмів. Скільки існує варіантів розподілу призів, якщо за всіма номінаціями встановлені різні премії?

Рішення. Кожен з варіантів розподілу призів є комбінацією 5 фільмів з 10, що відрізняється від інших комбінацій, як складом, так і їх порядком. Так як кожен фільм може отримати призи як по одній, так і за кількома номінаціями, то одні і ті ж фільми можуть повторюватися. Тому число таких комбінацій дорівнює числу розміщень з повтореннями з 10 елементів по 5:

$N = \overline{A}_{10}^{5} = 10^5 = 100000$.

Завдання 6. У шаховому турнірі беруть участь 16 осіб. Скільки партій має бути зіграно в турнірі, якщо між будь-якими двома учасниками повинна бути зіграна одна партія?

Рішення. Кожна партія грається двома учасниками з 16 і відрізняється від інших тільки складом пар учасників, тобто являє собою поєднання з 16 елементів по 2. Їх число дорівнює $C_{16}^{2} = \dfrac{16!}{14!2!} = \dfrac{15 \times 16}{1 \times 2} = 120.$

Завдання 7. В умовах задачі 6 визначити, скільки існує варіантів розподілу призів, якщо за всіма номінаціями встановлені однакові призи?

Рішення. Якщо по кожній номінації встановлені однакові призи, то порядок фільмів в комбінації 5 призів значення не має, і число варіантів є число поєднань з повтореннями з 10 елементів по 5, що визначається за формулою

$$\overline{C}_{10}^{5} = C_{10+5-1}^{5} = C_{14}^{5} = \frac{10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 2002.$$

Завдання 8. Садівник повинен протягом трьох днів посадити 6 дерев. Скількома способами він може розподілити по днях роботу, якщо буде садити не менше одного дерева в день?

Рішення. Припустимо, що садівник садить дерева в ряд, і може приймати різні рішення щодо того, після якого за рахунком дерева зупинитися в перший день і після якого - у другий. Таким чином, можна уявити собі, що дерева розділені двома перегородками, кожна з яких може стояти на одному з

5 місць (між деревами). Перегородки повинні стояти там по одній, оскільки інакше в якийсь день не буде посаджено жодного дерева. Таким чином, треба вибрати 2 елементи з 5 (без повторень). Отже, число способів $C_5^2 = 10$

<u>Завдання 9</u>. Скільки існує чотиризначних чисел (можливо, що починаються з нуля), сума цифр яких дорівнює 5?

Рішення. Уявімо число 5 у вигляді суми послідовних одиниць, розділених на групи перегородками (кожна група в сумі утворює чергову цифру числа). Зрозуміло, що таких перегородок знадобиться 3. Місць для перегородок є 6 (до всіх одиниць, між ними і після). Кожне місце може займати одна або кілька перегородок (в останньому випадку між ними немає одиниць, і відповідна сума дорівнює нулю). Розглянемо ці місця в якості елементів множини. Таким чином, треба вибрати 3 елементи з 6 (з повтореннями). Отже, шукана кількість чисел $\overline{C}_6^3 = C_8^3 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56.$

<u>Завдання 11</u>. Скількома способами можна розбити групу з 25 студентів на три підгрупи A, B і C по 6, 9 і 10 осіб відповідно?

Рішення. Тут n = 25, k = 3, n1 = 6, n2 = 9, n3 = 10. Відповідно до формули, число таких розбиття дорівнює $N_{25}(6,9,10) = \dfrac{25!}{6!9!10!}$.

<u>Завдання 12</u>. Скільки існує семизначних чисел, що складаються з цифр 4, 5 і 6, в яких цифра 4 повторюється 3 рази, а цифри 5 і 6 - по 2 рази?

Рішення. Кожне семизначні число відрізняється від іншого порядком проходження цифр, при цьому фактично всі сім місць у цьому числі діляться на три групи: на одні місця ставиться цифра «4», на інші місця - цифра «5», а на треті місця - цифра «6 ». Таким чином, безліч складається з 7 елементів (n = 7), причому n1 = 3, n2 = 2, n3 = 2, і, отже, кількість таких чисел дорівнює $N_7(3;2;2) = \dfrac{7!}{3!2!2!} = 210.$

<u>Завдання 13.</u> У ящику 5 апельсинів і 4 яблука. Навмання вибираються 3 фрукта. Яка ймовірність, що всі три фрукта - апельсини?

Рішення. Елементарними наслідками тут є набори, які включають 3 фрукта. Оскільки порядок фруктів байдужий, будемо вважати їх вибір неврегульованим (і бесповторного). Загальна кількість елементарних фіналів $n = |\Omega|$ дорівнює числу способів вибрати 3 фрукта з 9, тобто числу поєднань C_9^3. Число сприятливих результатів дорівнює числу способів вибору 3 апельсинів з наявних 5, тобто C_5^3. Тоді шукана ймовірність

$$P(A)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{\frac{5!}{2!3!}}{\frac{9!}{3!6!}}=0,12$$

Завдання 14. Викладач пропонує кожному з трьох студентів задумати будь-яке число від 1 до 10. Вважаючи, що вибір кожним із студентів будь-якого числа з заданих равновозможен, знайти ймовірність того, що у кого-то з них задумані числа співпадуть.

Рішення. Спочатку підрахуємо загальна кількість випадків. Перший із студентів вибирає одне з 10 чисел і має $n_1=10$ можливостей, другий теж має $n_2=10$ можливостей, нарешті, третій також має $n_3=10$ можливостей. В силу правила множення загальне число способів дорівнює: $n= n_1\times n_2\times n_3=10^3 = 1000$, тобто весь простір міститься 1000 елементарних фіналів. Для обчислення ймовірності події А зручно перейти до протилежного події, тобто підрахувати кількість тих випадків, коли всі три студента задумують різні числа. Перший з них як і раніше має $m_1=10$ способів вибору числа. Другий студент має тепер лише $m_2=9$ можливостей, оскільки йому доводиться дбати про те, щоб його число не співпало з задуманим числом першого студента. Третій студент ще більш обмежений у виборі - у нього всього $m_3=8$ можливостей. Тому загальна кількість комбінацій задуманих чисел, в яких немає збігів, так само $m=10\cdot 9\cdot 8=720$. Випадків, в яких є збіги, залишається 280. Отже, шукана ймовірність дорівнює Р = 280/1000 = 0,28.

Завдання 15. Знайти ймовірність того, що в 8-значному числі рівно 4 цифри збігаються, а решта різні.

Рішення. Подія А = {восьмизначних число містить 4 однакові цифри}. З умови задачі випливає, що в числі п'ять різних цифр, одна з них повторюється. Число способів її вибору дорівнює числу способів вибору однієї цифри з 10 цифр. Ця цифра займає будь-які 4 місця в числі, що можливо зробити способами C_8^4, так як порядок тут не важливий. Решта 4 місця займають різні цифри з невикористаних дев'яти, і так як число залежить від порядку розташування чисел, то число способів вибору чотирьох цифр дорівнює числу розміщень A_9^4. Тоді число сприятливих результатів $|A|=10C_8^4A_9^4$. Всього ж способів складання 8-значних чисел одно $|\Omega|=10^8$. Шукана ймовірність дорівнює

$$P=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{10C_8^4A_9^4}{10^8}=\frac{8!}{4!4!}\cdot\frac{9!}{5!}\cdot\frac{1}{10^7}=0,021168$$

Завдання 16. Шість клієнтів випадковим чином звертаються в 5 фірм. Знайти ймовірність того, що хоча б в одну фірму ніхто не звернеться.

Рішення. Розглянемо протилежну подію, яка полягає в тому, що в кожну з 5 фірм звернувся клієнт, тоді в якусь із них звернулися 2 клієнта, а в інші 4 фірми - по одному клієнту. таких можливостей $|\overline{A}| = 5 \times N_6(2,1,1,1,1) = \frac{5 \cdot 6!}{1!1!1!1!2!}$

Загальна кількість способів розподілити 6 клієнтів по 5 фірмам $|\Omega| = 5^6$. Звідси $P(\overline{A}) = \frac{5 \cdot 6!}{1!1!1!1!2!} \cdot \frac{1}{5^6} = 0{,}1152$. Отже, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}8848$

<u>Завдання 17</u>. Нехай в урні є N куль, з них M білих і N-M чорних. З урни витягується n куль. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться рівно m білих куль.

Рішення. Так як порядок елементів тут є несуттєвим, то число всіх можливих наборів обсягу n з N елементів дорівнює числу сполучень C_N^n Число випробувань, які благопріятствуют події A - "m білих куль, n-m чорних", так само $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ і, отже, шукана ймовірність дорівнює P(A)= $\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

<u>Завдання 18.</u> Точку навмання кинули на відрізок [0; 2]. Яка ймовірність її попадання в відрізок [0,5; 1,4]?

Рішення. Тут простір елементарних фіналів весь відрізок $\Omega = [0;2]$, а безліч сприятливих результатів $A = [0{,}5;1{,}4]$, при цьому довжини цих відрізків рівні відповідно $l(\Omega) = 2$ і $l(A) = 0{,}9$. Тому

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45$$

<u>Завдання 19</u> (завдання про зустріч). Два особи A і B домовилися зустрітися в певному місці між 12 і 13 годинами. Прийшовши першим чекає іншого протягом 20 хвилин, після чого йде. Чому дорівнює ймовірність зустрічі осіб A і B, якщо прихід кожного з них може статися навмання протягом зазначеного часу й моменти приходу незалежні?

Рішення. Позначимо момент приходу особи A через x і особи B - через y. Для того, щоб зустріч відбулася, необхідно і достатньо, щоб $x-y| \le 20$. Зобразимо x і y як координати на площині, в якості одиниці масштабу виберемо хвилину. Всілякі результати представляються точками квадрата зі стороною 60, а сприятливі зустрічі розташовуються в заштрихованої області. Шукана ймовірність дорівнює відношенню площі заштрихованої фігури (рис. 2.1) до площі всього квадрата P(A) = $(60^2–40^2)/60^2$ = 5/9.

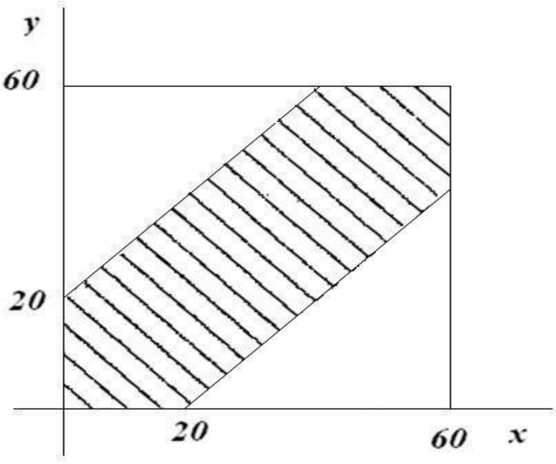


Рис. 1.1.

2. 1. СКЛАДНІ ПОДІЇ

2.1. Операції над подіями

1. Сумою двох подій A і B називають подію C, що позначається $C = A + B$ *та складається з елементарних результатів, та належать до хоча б одної з двох подій:* $C = \{\omega i \in \Omega : \omega i \in A \text{ або/та } \omega i \in B\}$.

Властивості:

1) $A + B = B + A$;

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

$A + A = A, \; A + \emptyset = A, \; A + \Omega = \Omega, \; A + \overline{A} = \Omega, \; \Omega + \emptyset = \Omega.$

2. Добутком двох подій A і B називають подію C, що позначається C= AB, що складається з елементарних результатів, що включає в себе дві події одночасно: $C = \{\omega i \in \Omega : \omega i \in A \text{ та } \omega i \in B\}$.

Властивості:

1) $AB = BA$;

2) $A(BC) = (AB)C$;

3) $A(B + C) = AB + AC$.

$$AA = A, \quad A\emptyset = \emptyset, \quad A\Omega = A, \quad A\overline{A} = \emptyset, \quad \Omega\emptyset = \emptyset.$$

Правила де Моргана:

1) $\overline{A + B} = \overline{AB}$;

2) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

Події A и B називають несумісними, якщо AB = $\emptyset$.

2.2. Теорема складання ймовірностей

Теорема. *Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи, тобто:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доведення. *Нехай простір Ω складається з* n*-елементарних результатів деякого експерименту, подія А – з* k *елементарних результатів, подія В – з* l *елементарних результатів, подія АВ – з* m *елементарних результатів. Тоді:*

$$P(A+B) = \frac{k+l-m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} - \frac{m}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Якщо події А та В несумісні, то $P(AB) = 0$ *та* $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Наслідок. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

2.3. Умовна ймовірність.

Теорема множення імовірностей

Теорема. *Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої, тобто:*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) \text{ или } P(AB) = P(B)P(A/B).$$

Доведення. Нехай простір Ω складається з n *елементарних результатів деякого експерименту, подія А - з* k *елементарних результатів, подія В – з* l *елементарних результатів, подія АВ – з* m *елементарних результатів. Тоді:*

$$P(A) = \frac{m}{n}, P(AB) = \frac{l}{n}, P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{l}{m} \rightarrow P(A)P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{m} = \frac{l}{n} = P(AB).$$

Аналогічно доводять другу рівність.

Дві події А і В називають незалежними, якщо P(AB)=P(A) або P(B/A)=P(B).

В цьому випадку P(AB)=P(A)P(B).

2.5. Формула повної ймовірності

Нехай подія А може настати за умови настання однієї з подій H_1, H_2,..., H_n, *так званих гіпотез які утворюють повну групу подій, тобто які відповідають умовам:*

1)$H_i H_j = \varnothing$ $i \neq j$*;*

2) $\sum_{i=1}^{n} H_1 = \Omega$.

Тоді $A = \Omega A = \sum_{i=1}^{n}(H_i A)$, *та застосовуючи формулу множення ймовірностей, можна отримати наступну рівність:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

*Ця рівність називається **формулою повної ймовірності**.*

2.6. Формула Байеса

Нехай знаходимося в умовах постановки задачі для формули повної ймовірності. Відомо, що
$P(AH_i) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i)$.
Тоді умовна ймовірність $P(H_i/A)$ *гіпотези* H_i *за умови, що подія А сталося, визначається за формулою*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{A},$$

яка називається ***формулою Байеса****. Ця формула дозволяє переглянути ймовірності гіпотез після настання події А.*
Зауваження:
1. Значення Р (А) обчислюється за формулою повної ймовірності.
2. Чисельник формули є і-ю складовою у формулі повної ймовірності.
3. Формула Байеса застосовується в задачах, в яких вихідна подія сталося.

Приклади:

Завдання 1. У ящику 10 червоних і 5 синіх гудзиків. Виймаються навмання два гудзики. Яка ймовірність, що гудзики будуть одноколірними?

Рішення. Подія А = {вийняті гудзики одного кольору} можна представити у вигляді суми $A = A_1 + A_2$ де події A_1 і A_2 означають вибір гудзиків червоного і синього кольору відповідно. Імовірність витягнути дві червоні гудзики дорівнює $P(A_1) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}$ а ймовірність витягнути дві сині ґудзики $P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_{15}^2}$ Так як події A_1 і A_2 не можуть відбутися одночасно, то в силу теореми додавання

$$P(A) = \frac{C_{10}^2 + C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{\frac{10!}{2!8!} + \frac{5!}{2!3!}}{\frac{15!}{2!13!}} = 0{,}524.$$

Завдання 2. Серед співробітників фірми 28% знають англійську мову, 30% - німецьку, 42% - французьку; англійська та німецька - 8%, англійський і французький - 10%, німецький і французький - 5%, все три мови - 3%. Знайти ймовірність того, що випадково обраний співробітник фірми: а) знає англійську або німецьку; б) знає англійську, німецьку чи французьку; в) не знає жоден з перерахованих мов.

Рішення. Позначимо через А, В і С події, які полягають в тому, що випадково обраний співробітник фірми володіє англійською, німецькою чи французькою відповідно. Очевидно, частки співробітників фірми, які володіють тими чи іншими мовами, визначають ймовірності цих подій.

отримуємо:

а) P(A∪B)=P(A)+P(B) –P(AB)=0,28+0,3–0,08=0,5;

б)
P(A∪B∪C)=P(A)+P(B)+P(C)–(P(AB)+P(AC)+P(BC))+P(ABC)=0,28+0,3+0,42–

–(0,08+0,1+0,05)+0,03=0,8;

в) 1–P(A∪B∪C)=0,2.

<u>Завдання 3.</u> У родині - двоє дітей. Яка ймовірність, що старша дитина - хлопчик, якщо відомо, що в родині є діти обох статей?

Рішення. Нехай A = {старша дитина - хлопчик}, B = {в родині є діти обох статей}. Будемо вважати, що народження хлопчика і народження дівчинки - рівноімовірні події. Якщо народження хлопчика позначити буквою Х, а народження дівчинки - Д, то простір всіх елементарних фіналів складається з чотирьох пар: $\Omega = \{ÕÕ, ÕÄ, ÄÕ, ÄÄ\}$. У цьому просторі лише два результати (МД і ДМ) відповідають події B. Подія AB означає, що в родині є діти обох статей. Старша дитина - хлопчик, отже, другий (молодший) дитина - дівчинка. Цій події AB відповідає один результат - ХД. Таким чином, AB|=1, |B|=2

$$P(A \mid B) = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

<u>Завдання 4.</u> Майстер, маючи 10 деталей, з яких 3 - нестандартних, перевіряє деталі одну за одною, поки йому не попадеться стандартна. Яка ймовірність, що він перевірить рівно дві деталі?

Рішення. Подія A = {майстер перевірив рівно дві деталі} означає, що при такій перевірці перша деталь виявилася нестандартною, а друга - стандартна. Значить, $A = A_1A_2$, де A_1 = {перша деталь виявилася нестандартною} і A_2 = {друга деталь - стандартна}. Очевидно, що ймовірність події A_1 дорівнює $P(A_1) = 3/10$, крім того, $P(A_2 \mid A_1) = 7/9$, так як перед взяттям другий деталі у майстри залишилося 9 деталей, з яких тільки 2 нестандартні і 7 стандартних. По теоремі множення

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = 7/30.$$

<u>Завдання 5.</u> В одному ящику 3 білих і 5 чорних куль, в іншому ящику - 6 білих і 4 чорних кулі. Знайти ймовірність того, що хоча б з одного ящика буде вийнято білу кулю, якщо з кожного ящика вийнято по одній кулі.

Рішення. Подія А = {хоча б з одного ящика виймуть білу кулю} можна представити у вигляді суми $A = A_1 + A_2$ де події A_1 і A_2 означають появу білої кулі з першого і другого ящика відповідно. Імовірність витягнути біла куля з першого ящика дорівнює $P(A_1) = 3/8$ а ймовірність витягнути біла куля з другого ящика $P(A_2) = 6/10$ Крім того, в силу незалежності A_1 і A_2, маємо

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{40}:$$

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 3/8 + 6/10 - 9/40 = 3/4$$

<u>Завдання 6.</u> Три екзаменатора приймають іспит з деякого предмету у групи в 30 чоловік, причому перший опитує 6 студентів, другий - 3 студентів, а третій - 21 студента (вибір студентів проводиться випадковим чином зі списку). Ставлення трьох екзаменаторів до слабо підготувати різне: шанси таких студентів скласти іспит у першого викладача рівні 40%, у другого - тільки 10%, у третього - 70%. Знайти ймовірність того, що слабо підготувати студент складе іспит.

Рішення. позначимо через H_1, H_2, H_3 гіпотези, що складаються в тому, що слабо підготувати студентів відповідав першому, другому і третьому екзаменатора відповідно. За умовою завдання

$$P(H_1) = 6/30 = 0{,}2, \quad P(H_2) = 3/30 = 0{,}1, \quad P(H_3) = 21/30 = 0{,}7.$$

Нехай подія А = {слабо підготувати студентів здав іспит}. Тоді знову в силу умови задачі

$$P(A \mid H_1) = 0{,}4, P(A \mid H_2) = 0{,}1, P(A \mid H_3) = 0{,}7$$

За формулою повної ймовірності отримуємо:

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}58$$

<u>Завдання 7.</u> Фірма має три джерела постачання комплектуючих - фірми A, B, C. На частку фірми А доводиться 50% загального обсягу поставок, B - 30% і C - 20%. З практики відомо, що серед що поставляються фірмою А деталей 10% бракованих, фірмою B - 5% і фірмою C - 6%. Яка ймовірність, що взята навмання деталь виявиться придатною?

Рішення. Нехай подія G - поява придатної деталі. Ймовірності гіпотез про те, що деталь поставлена фірмами A, B, C, рівні P(A)=0,5, P(B)=0,3, P(C)=0,2. мовні ймовірності появи при цьому придатної деталі рівні P(G|A)=0,9, P(G|B)=0,95, P(G|C)=0,94 (Як імовірності протилежних подій до появи бракованої). За формулою повної ймовірності отримуємо:

$P(G)=0{,}5\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}95+0{,}2\cdot 0{,}94=0{,}923$.

3. ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

Нехай деякий експеримент (дослід) проводиться n раз в незмінних умовах. Кожне таке проведення експерименту назвемо випробуванням. Ці випробування називаються незалежними щодо події А, якщо ймовірність його настання в кожному з n випробувань не залежить від результатів інших випробувань. Ставиться завдання знайти ймовірність $P_n(k)$ *того, що в n незалежних випробуваннях подія А з'явиться к раз, якщо ймовірність настання події А в кожному випробуванні постійна і дорівнює числу* $p = P(A)$

Нехай проведено n незалежних випробувань і в будь-яких к з них настала подія А, тоді ймовірність настання к раз події А в цьому варіанті за теоремою множення ймовірностей для незалежних подій дорівнює $p^k p^{n-k}$ *, де q=1-p.Так як число різних варіантів дорівнює* C_n^k*, то за теоремою додавання ймовірностей*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

*Це рівність називається **формулою Бернуллі**.*

Найімовірніше число подій

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

Асимптотичні формули в схемі Бернуллі

Якщо число випробувань досить велике (n > 30), то використання формули Бернуллі недоцільне в силу необхідності виконання громіздких обчислень. Тому застосовують асимптотичні (наближені) формули.

Формула Пуассона

*Якщо npq ≤ 10 і p ≪ 0,5 (близьке до нуля), то можна застосовувати **формулу Пуассона** (формулу рідкісних явищ):*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \text{де } \lambda = np$$

Зауваження: для знаходження значень P_n *(k) можна користуватися таблицею (дод. 3).*

Локальна формула Муавра-Лапласа

Якщо npq > 10, то застосовується локальна формула Муавра-Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}$$

Зауваження: 1) φ(-x) = φ(x); 2) для значень функції φ(x) є спеціальні таблиці (дод.1)

Інтегральна формула Муавра-Лапласа

Для обчислення в схемі Бернуллі ймовірності того, що число k подій A в n випробуваннях виявиться в проміжку від k_1 до k_2, використовується ***інтегральна формула Муавра-Лапласа****:*

$$P(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

де $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ *та* $\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ *- функція Лапласа.*

зауваження:

1) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

2) для значень функції Лапласа є спеціальні таблиці (дод. 2)

3) при $x \geq 5$ $\Phi(x) \approx 0,5$.

Відхилення частоти від середнього значення в незалежних випробуваннях

$$P(|k - np| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

Відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\frac{n}{\sqrt{pq}}\right)$$

Приклади:

Завдання 1. Гральний кубик кинуто 6 разів. Знайти ймовірність того, що рівно 3 рази випаде «шістка».

Рішення. Шестиразове кидання кістки можна розглядати як послідовність незалежних випробувань з ймовірністю успіху («шістки»), що дорівнює 1/6, і ймовірністю невдачі - 5/6. Шукану ймовірність обчислюємо за формулою $P_6(3) = C_6^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,053$

Завдання 2. Монета кидається 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде не більше, ніж 2 рази.

Рішення. Шукана ймовірність дорівнює сумі ймовірностей трьох подій, що складаються в тому, що герб чи не випаде ні разу, або один раз, або два рази:

$P(A) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = C_6^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}344$.

Завдання 3. Аудитор виявляє фінансові порушення у перевіряється фірми з ймовірністю 0,9. Знайти ймовірність того, що серед 4 фірм-порушників буде виявлено більше половини.

Рішення. Подія полягає в тому, що з 4 фірм-порушників буде виявлено три або чотири, тобто

$$P(A) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 + C_4^4 0{,}9^4 = 0{,}9^3(0{,}4 + 0{,}9) = 0{,}9477$$

Завдання 4. Монета підкидається 3 рази. Знайти найбільш ймовірне число успіхів (випадінь герба).

Рішення. Можливими значеннями для числа успіхів в трьох розглянутих випробуваннях є m = 0, 1, 2 або 3. Нехай Am - подія, яка полягає в тому, що при трьох підкидання монети герб з'являється m раз. За формулою Бернуллі легко знайти ймовірності подій Am (див. Таблицю):

m	0	1	2	3
$P_n(m)$	1/8	3/8	3/8	1/8

З цієї таблиці видно, що найбільш ймовірними значеннями є числа 1 і 2 (їх ймовірності рівні 3/8). Цей же результат можна отримати і з теореми 2. Дійсно, n = 3, p = 1/2, q = 1/2. тоді

$$3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \le m^* \le 3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \text{ т.е. } 1 \le m^* \le 2$$

Завдання 7. Імовірність покупки при відвідуванні клієнтом магазину складає p = 0,75. Знайти ймовірність того, що при 100 відвідинах клієнт зробить покупку рівно 80 разів.

Рішення. В даному випадку n=100, m=80, p=0,75, q=0,25 знаходимо $x = \frac{80 - 100 \times 0{,}75}{\sqrt{100 \times 0{,}75 \times 0{,}25}} = 1{,}16$ і визначаємо φ(x)=0,2036 тоді шукана ймовірність дорівнює $\frac{0{,}2036}{\sqrt{100 \times 0{,}75 \times 0{,}25}} = 0{,}047$

4. ВИПАДКОВІ ДИСКРЕТНІ ВЕЛИЧИНИ

Числова величина називається випадковою, якщо вона може прийняти одне з можливих значень, що відомі заздалегідь.

Якщо множина значень випадкової величини X дискретне, тобто $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$*, то випадкова величина називається дискретною. Наприклад, число бракованих деталей в випадково відібраній партії, к-ксть світлофорів, які проїхав автомобіль без зупинки, число хлопчиків, що народилися за добу у вибраній країні – дискретні величини.*

Добутком числа α на випадкову величину X називають величину Y= αX, можливі значення якої дорівнюють αx_i *, де* $x_i \in X$*.*

Сумою двох випадкових величин X та Y називається випадкова величина $Z = X + Y$*, можливі значення якої дорівнюють* $x_i + y_j$ *,* $x_i \in X$ *,* а $y_i \in Y$.

Добутком двох випадкових величин X та Y називається випадкова величина $Z = XY$*, можливі значення якої дорівнюють* $x_i y_j$, де $x_i \in X$, а $y_j \in Y$.

Закон розподілення. Функція розподілення.

Прийняття випадковою величиною X одного з можливих своїх значень можна розглядати як випадкову подію. Кожній випадковій події можна поставити у відповідність ймовірність її появи.

Нехай задана випадкова величина $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$*.*
Події $X = x_i, (i = \overline{1,n})$ *створюють повну групу, тобто виконані наступні умови:*

а) $(X = x_i)(X = x_j) = \emptyset,\ \left(i, j = \overline{1,n}\right),\ i \neq j$;

б) $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$.

Законом розподілення випадкової дискретної величини X (ВДВ) називають співвідношення, що встановлює зв'язок між подіями $X = x_i, (i = \overline{1,n})$ *та ймовірностями їх появи. Одним із способів задання закону розподілу є табличний спосіб:*

X	x1	x2	...	xi	...	xn
pi	p1	p2	...	pi	...	pn

Тут $p_i = P(X = x_i)$ *та* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$*. Дві випадкові величини називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла інша.*

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція F(x), що задає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше, ніж x, тобто $F(x) = P(X < x)$.

Для випадкової дискретної величини X функція розподілення приймає вигляд $F(x) = \sum_{x_i<x} P(X = x_i)$.

Середнє квадратичне відхилення

Дисперсія

Нехай нам відомий закон розподілення випадкової дискретної величини $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Дисперсією випадкової величини X називається числова величина, що позначається як D(X) і дорівнює: $D(X)=M((X-M(X))^2)$.

Властивості дисперсії

1. D(C) = 0.
2. $D(CX) = C^2 D(X)$.
3. D(X ± Y) = D(X) + D(Y) , якщо X і Y незалежні випадкові величини.

Доведення. $D(X \pm Y) = M(((X \pm Y) - M(X \pm Y)^2) =$

$$= \left(\left((X - M(X)) \pm (Y - M(Y))\right)^2\right) =$$

$$= M((X - M(X))^2 + (Y - M(Y))^2 \pm 2(X - M(X))(Y - M(Y)) =$$

$$= M((X - M(X))^2 + (Y - M(Y))^2) =$$

$$= M((X - M(X))^2) + M((Y - M(Y))^2) = D(X) + D(Y)$$

Наслідки:
1. D(X - M(X)) = 0.
2. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.
3. Дисперсія числа появи події А у схемі Бернулі дорівнює npq.

Середньоквадратичне відхилення

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

5. ВИПАДКОВІ НЕПЕРЕРВНІ ВЕЛИЧИНИ

Якщо більшість значень випадкової величини X це неперервний числовий *проміжок, то випадкова величина має назву неперервна. Наприклад, наступні випадкові величини: дальність польоту артилерійського заряду, розмір заданого параметру виготовленої деталі, час безаварійної роботи станку, є неперервними.*

5.1. Функція розподілу. Щільність розподілу.

$F(x) = P(X < x)$ – функція розподілу.
Властивості функції розподілу:
1. *$0 \le F(x) \le 1$; $F(x)$ – неперервна функція.*
2. *$F(x)$ – незростаюча функція: $\forall\, x_1 < x_2 \to F(x_1) \le F(x_2)$.*

Введемо наступні події:
$A = (X < x_1)$, $B = (X < x_2)$, $C = (x_1 \le X < x_2)$.
Тоді $A + C = B$, $P(B) = P(A) + P(C) = P(B) - P(A)$. Так як
$P(A) = F(x_1)$, $P(B) = F(x_2)$ та $P(C) \ge 0$, то виходить, що $F(x_1) = F(x_2)$
3. $lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
4. *$P(X{=}\alpha) = 0$, так как*

$$lim_{\beta\to\alpha} P(\alpha \le X \le \beta) = lim_{\beta\to\alpha}(F(\beta) - F(\alpha)) \to P(\alpha) = 0$$

Наслідок: $P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.
Ґрунтуючись на наслідку з властивості 4 – функції розподілу – запишемо наступну рівність:

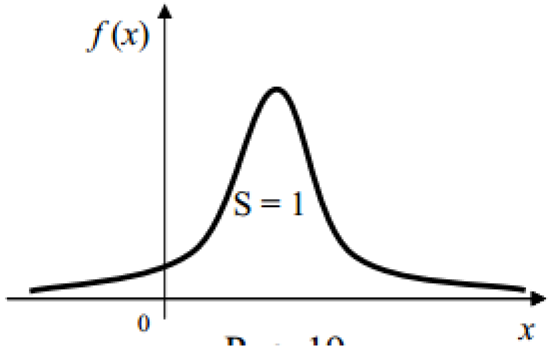
$$P(x \le X \le x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x);$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Щільністю розподілу ймовірностей є функція $f(x) = F'(x)$, відповідно $P(x \le X \le x + \Delta x) = f(c)\Delta x \approx p(x)$, що і пояснює назву функції $f(x)$. Графік щільності розподілу $f(x)$ називається кривою розподілу.

Властивості щільності розподілу:

1. $f(x) \ge 0$, *так як $f(x) = F'(x)$, а $F(x)$ – зростаюча функція.*
2. $P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ – *геометрична інтерпретація:*



4. $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x)$.

5.2. Числові характеристики випадкових неперервних величин

Математичне очікування

$$P(x_i \le X \le x_i + \Delta x_i) = F(x_i + \Delta x_i) - F(x_i) = F'(\overline{x_i})\Delta x_i = f(\overline{x_i})\Delta x_i \approx p_i.$$

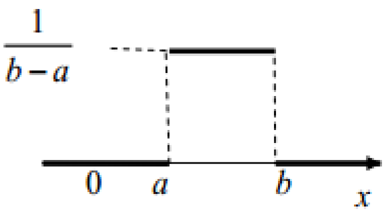
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, f(\overline{x_i})\, \Delta x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \to M(X) = \int_{-\infty}^{-\infty} xf(x)dx$$ –

визначення математичного очікування.

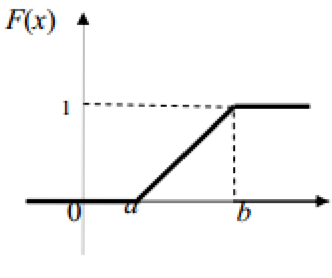
5.3 Окремі випадки розподілення

Рівномірне розподілення

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a \le x \le b, \\ 0, x < a, x > b. \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b, \\ 1, x > b. \end{cases}$$

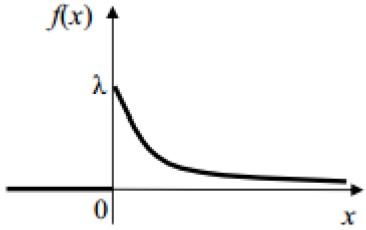


Для рівномірного розподілення:

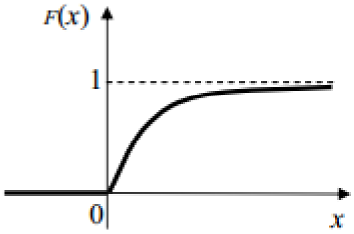
$$M(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, P(\alpha \le x \le \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Показникове розподілення

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} 0, \mathrm{x} < 0, \\ \lambda e^{-\lambda \mathrm{x}}, x \geq 0. \\ \lambda > 0 \end{cases}$$



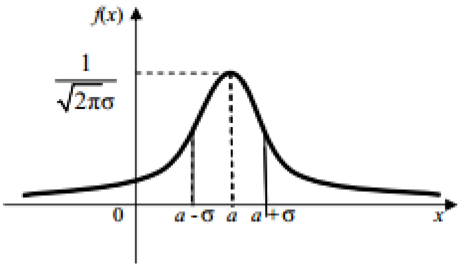
$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda \mathrm{e}} \end{cases}$$



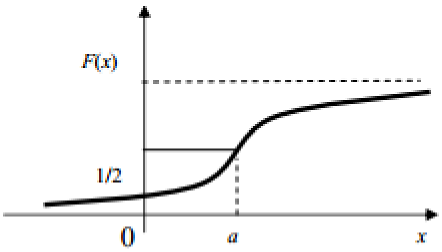
$$\mathrm{M(X)} = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}, P(\alpha \leq x \leq \beta) = e^{-\beta x}.$$

Нормальне розподілення

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}.$$



$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)^2} dt.$$



$$M(X) = a, D(X) = \sigma, f(x) = N(a, \sigma), N(a, \sigma), N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}x^2} = \varphi(x).$$

$$P(a \leq X \leq \beta) = Q\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), P(\left|X - a\right| < \varepsilon) = 2Q\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Правило трьох сигм: $P(|X - a| < 3\varepsilon) = 2Q(3) = 0{,}9973$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ИНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. З таблиці випадкових чисел навмання обрані два числа. Події A і B відповідно означають, що вибране хоча б одне просте число і хоча б одне парне число. Що означають події AB і A U B?

2. З кошика з п'ятьма червоними яблуками і чотирма зеленими беруться (без повернення) навмання три яблука. З якою ймовірністю серед цих трьох яблук: а) рівно два зелених, б) хоча б одне червоне?

3. Молодий чоловік домовився зустрітися з дівчиною між 9 і 10 годинами і обіцяв чекати її до 10 годин. Дівчина обіцяла чекати його 10 хвилин, якщо прийде раніше. Знайти ймовірність того, що вони зустрінуться. Передбачається, що моменти їх приходу рівновірогідні протягом години.

4. При передачі тексту в середньому 5 % букв спотворюється і приймається невірно. Передано слово з 6 букв. Яка ймовірність того, що всі букви слова будуть прийняті правильно? Передбачається, що букви спотворюються незалежно один від одного.

5. У тирі є 6 однакових на вигляд рушниць. Ймовірність влучення в мішень для двох з них по 0,9, для трьох з 0,8 і для одного 0,3. Яка ймовірність того, що стрілець потрапить у мішень, якщо він вибирає рушницю навмання? Яка ймовірність того, що було вибрано рушницю, для якого ймовірність потрапляння 0,3, за умови, що стрілок влучив у мішень?

6. Ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,6 при кожному пострілі. Стрілянина ведеться одиночними пострілами до першого попадання, поки не буде витрачений боєзапас. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа вироблених пострілів, якщо боєзапас становить 3 одиниці. Побудувати графік функції розподілу.

7. Випадкова величина ξ має трикутний розподіл. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} Ax & \text{при } 0 \le x \le \theta; \\ 0 & \text{при } x \notin [0;\ \theta]. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A, математичне очікування і стандартне відхилення. Знайти ймовірність того, що $\xi > \theta/2$. Накреслити графіки щільності розподілу і функції розподілу.

8. Скласти таблицю спільного розподілу числа випавших одиниць і числа випавших шісток при одному підкиданні грального кубика. Знайти

коефіцієнт кореляції між ними.

9. Учасник лотереї кидає гральну кістку 10 разів. Учасник отримує цінний приз, якщо сума очок більше 50. Оцінити ймовірність отримання цінного призу.

10. Для вибірки (X_1, X_2, ..., X_n) з розподілу з щільністю розподілу f(x) знайти оцінки параметра $\theta > 2$ за першим моментом і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{-(\theta+1)} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

0,78 1,26 1,58 2,11 0,01 1,35 2,05 0,76 1,65 1,61 0,12 2,03 1,07 1,10
3,06 0,38 0,64 1,63 0,54 2,65 0,82 1,21 0,73 1,99 2,44 0,93 0,47 0,88

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,46 0,68 0,59 1,97 1,03 0,62 0,89 1,93 0,88 1,66 1,34 1,99 0,59 0,00 0,46 1,48 1, 35 1,74

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону ($n = 5, p = 0.37$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких α мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини

деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (а =10, σ= 1, α =3, β =5, δ= 1)

15. Нехай ξ та η незалежні випадкові величини з щільностями $p_\xi(x,C_1)$ та $p_\eta(x,C_2)$ відповідно (C_1 та C_2 - константи). Знайти значення констант C_1 та C_2. Знайти функції розподілу випадкових величин ξ та η. Знайти функцію розподілу випадкової величини ζ - $\zeta(\xi;\eta)$. Знайти математичні очікування та дисперсії $m_\xi, m_\eta, m_\zeta, D_\xi, D_\eta, D_\zeta$

$\begin{cases} C_1 e^{-4x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2C_2, x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$	$\zeta = \zeta(\xi;\eta)$: $2\xi + \eta$

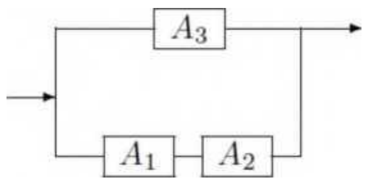
Варіант 2

1. З таблиці випадкових чисел навмання взято одне число. Подія А вбрання число ділиться на 5; подія В - це число закінчується нулем. Що означають події А\ B і $\overline{\text{AB}}$?

2. У квадрат з вершинами (0.0), (0.1), (1.0), (1,1) навмання кинута точка. Нехай (X, У) її координати. Знайти Р (шах {X + 3Y, Y}≤ 1/2).

3. Кидають 3 гральні кістки. Яка ймовірність того, що на них випаде різна кількість очок?

4. Електричне коло складається з елементів A_k, з'єднаних за наступною схемою:



Ймовірність виходу з ладу кожного елемента A_k дорівнює 0,02. Передбачається, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що ланцюг буде пропускати струм.

5. Однакові деталі надходять на складання з трьох автоматів. Перший автомат дає 20%, другий 30 %, третій 50 % всіх деталей, необхідних для збірки. Брак в продукції першого автомата становить 2,5%, другого - 2 %, третього 2,5 %. Знайти ймовірність надходження на збірку бракованої деталі. Знайти ймовірність того, що виявлена бракована деталь виготовлена на першому автоматі.

6. По мішені одночасно стріляють три стрілка, імовірності влучень

яких дорівнюють відповідно 0,55, 0,6 і 0,65. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа влучень в мішень. Побудувати графік функції розподілу.

7. Розподіл Парето наближено описує розподіл доходів фізичних осіб. Щільність розподілу дорівнює:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^{\alpha}} & \text{при } x \geq \theta; \\ 0 & \text{при } x < \theta. \end{cases}$$

де $\alpha > 2$, $\theta > 0$ - параметри розподілу, A нормувана

константа. Знайти константу А. Обчислити значення параметра α, при якому математичне очікування перевищує значення параметра θ в 3 рази.

8. Підкидаються три симетричних монети. Скласти таблицю спільного розподілу кількостей випавших гербів на трьох монетах і на перших двох монетах. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Час очікування поїзда метро за одну поїздку має рівномірний розподіл на відрізку від 0 до 5 хвилин. Оцінити ймовірність того, що сумарний час очікування за 30 поїздок виявиться менше 1,5 годин.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ по другому моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

2,05 0,80 0,32 3,31 1,12 3,29 3,87 2,65 2,01 2,65 1,19 -0,85 4,07 1,23 3,38 5,17 1 , 51 2,20 5,41 1,22 1,89 2,02 3,17 -1.02 2,73 1,10 3,87

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1: на рівні довіри 0,01; на рівні

довіри 0,001.

0,24 1,25 0,87 0,54 0,48 1,20 1,79 0,62 0,75 0,55

0,46 1,02 1,71 1.91 0,83 0,99 1,46 1,09 0,94

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону ($n = 14, p = 0.28$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (а =35, σ = 1, α =16, β =24, δ= 1)

15. Нехай ξ та η незалежні випадкові величини з щільностями $p_\xi(x, C_1)$ та $p_\eta(x, C_2)$ відповідно (C_1 та C_2 - константи). Знайти значення констант C_1 та C_2. Знайти функції розподілу випадкових величин ξ та η. Знайти функцію розподілу випадкової величини ζ - $\zeta(\xi;\eta)$. Знайти математичні очікування та дисперсії $m_\xi, m_\eta, m_\zeta, D_\xi, D_\eta, D_\zeta$

$\begin{cases} C_1 e^{-2x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\zeta = \zeta(\xi;\eta)$: $\max(2\xi, \eta)$

Варіант 3

1. Подія А - хоча б одне з наявних чотирьох виробів браковане, подія В - бракованих виробів серед них не менше двох. Що означають протилежні події $\overline{\text{B}}$ і $\overline{\text{A}}$

2. У квадрат з вершинами (0.0), (0.1), (1.0), (1,1) навмання кинута точка. Нехай *(X, Y)* - її координати. Знайти *P (max {2 X, Y} < 1/3).*

3. У студентській групі 15 юнаків і 10 дівчат. На університетський святковий бал група отримала тільки 2 запрошення, які розігруються за жеребом. Яка ймовірність того, що на бал потраплять юнак і дівчина?

4. Робочий обслуговує 4 верстати, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що протягом години верстат не зажадає уваги робочого, дорівнює для першого верстата 0,6, для другого - 0,8, для третього 0,9, для четвертого 0,7. Знайти ймовірність того, що хоча б один з верстатів

протягом години не зажадає уваги робочого.

5. Верстат обробляє 2 види деталей А і В. причому час роботи розподіляється між ними в співвідношенні 1: 4. При обробці деталі виду А він працює з максимальною для нього навантаженням протягом 70% часу, при обробці деталі виду В - 50 % часу. У випадковий момент часу верстат працював з максимальним навантаженням. Визначити ймовірність того, що в цей час він обробляв деталь виду А; виду В.

6. Ймовірність влучення баскетбольного м'яча в кільце при киданні початковим спортсменом дорівнює 1/4. М'яч кидають до першого попадання, але дають не більше 4 спроб. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа промахів. Побудувати графік функції розподілу.

7. Швидкість пішохода на дистанції в 1 км є випадковою величиною, рівномірно розподіленим на відрізку від *2км/год* до *4км/год*. Знайти математичне сподівання і стандартне відхилення часу, витраченого на подолання дистанції. Знайти ймовірність того, що цей час перевищить 24 хвилини.

8. У групі з 25 студентів тільки двоє вивчали в школі модальну логіку, і саме вони отримали оцінку «5» на іспиті. З інших студентів 10 осіб отримали оцінку «4», 10 осіб оцінку «3», і 3 студента отримали «двійки». Скласти таблицю спільного розподілу оцінки на іспиті і індикатора вивчення модальної логіки для обраного навмання студента. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Число помилок на сторінці книги має розподіл Пуассона з параметром 2. Знайти межі, в яких з ймовірністю 0,9 лежить число помилок у книзі з 400 сторінок.

10. Для вибірки *(*X_1, X_2, ..., X_n*)* з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ по третьому моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta} e^{-x^3/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки

7,61 3,33 7,35 3,05 2,54 1,91 1,77 2,92 5,95 2,31 0,27 5,12 6,60 -1,58
5,42 5,67 6,28 -0,09 2,74 2,45 1,11 6,97 -1,59 -1,41 2,69 4,99 7,24 1,75
4,76

щільності розподілу.

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,49 1,42 0,61 2,00 0,59 0,58 1,18 1,58 1,01 0,57

0,05 0,25 0,17 1,30 0,52 0,91 0,84 1,66 1,24

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_{\xi}(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону ($n = 6, p = 0.53$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (a =55, σ = 6, α =25, β =65, δ= 3)

15.Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = X^3$, де X - випадкова величина, має щільність розподілу

$$f(t) = \begin{cases} At^2 e^{-\alpha t}, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Варіант 4

1. Монета підкидається три рази поспіль. Побудувати простір елементарних фіналів Ω. Описати подію A, що складається в тому, що випало не менше двох гербів.

2. У компанії з трьох чоловік вирішили зробити один одному подарунки, для чого кожен приніс подарунок. Всі подарунки склали разом, перемішали і випадково розподілили серед учасників. Знайти ймовірність, що хоча б один подарунок повернеться до свого власника.

3. На лінійці довжиною 20 см випадково зроблені дві насічки. Яка ймовірність того, що перша виявиться далі від початку не менше, ніж на 5 см, в порівнянні з другою?

4. Деталі проходять три операції обробки, на кожної з операцій може виникнути брак незалежно від інших операцій з вірогідністю 0,02, 0,03 і

0,035 відповідно. Знайти ймовірність отримання небракованной деталі.

5. Імовірність того, що виріб відповідає стандарту, дорівнює 0,95. На заводі прийнята система з трьох незалежних випробувань, кожне з яких виріб, що задовольняє стандарту, проходить з ймовірністю 0,8, а не задовольняють - з ймовірністю 0,3. Яка ймовірність того, що навмання взятий виріб витримає випробування? Яка ймовірність того, що виріб, що витримало випробування, задовольняє стандарту?

6. Імовірність виготовлення нестандартного виробу при налагодженому технологічному процесі постійна і дорівнює 1/5. Для перевірки виробів відділ технічного контролю бере з партії вироби одне за іншим, але не більше 3 виробів. При виявленні нестандартного вироби вся партія затримується. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа виробів, що перевіряються в кожній партії. Побудувати графік функції розподілу.

7. Потужність W, яка виділяється на опорі R обчислюється за законом W=RI^2, де I - сила струму. Передбачається, що сила струму розподілена рівномірно на відрізку від 1 до 2 ампер. Знайти щільність розподілу і математичне очікування потужності, що виділяється на опорі в 1000 Ом. Знайти ймовірність того, що потужність перевищить 2 кВт.

8. В науковому відділі 3 лабораторії. У першій лабораторії 4 співробітника і2 дослідних проекту, в другій 6 співробітників і 1 проект, в третій 3 співробітника і 2 проекту. Знайти спільний розподіл числа співробітників і числа проектів в обраній навмання лабораторії. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Маршрут розбитий на 900 ділянок. Похибка вимірювань довжини кожного з них розподілена за нормальним законом з нульовим середнім і стандартним відхиленням 5 метрів. Знайти, в яких межах лежить сумарна похибка з ймовірністю 0,95.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу $f(x)$ знайти оцінки параметра $\theta > 0$ за першим моментом і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу.

Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

-1,70 -0,72 -4,46 -3,24 2,42 -1,70 -1,24 -0,07 6,20 2,67 1,80 0,26 9,61 2,51 1 , 44 -3,65 5,50 4,17 -2,06 7,48 2,60 7,61 2,54 9,77 9,67 7,36 7,86 11,22 3,38

12.За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0;2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0.1: на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

1,60 1,44 0,70 1,33 0,74 0,61 1,03 1,25 0,85 0,81 1,04 0,76 0,80 1,55 1,61 0,82 1, 70 1,63

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону ($n = 9, p = 0.46$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (а =15, σ= 2, α =7, β =9, δ= 3)

15. Нехай ξ та η незалежні випадкові величини з щільностями $p_\xi(x,C_1)$ та $p_\eta(x,C_2)$ відповідно (C_1 та C_2 - константи). Знайти значення констант C_1 та C_2. Знайти функції розподілу випадкових величин ξ та η. Знайти функцію розподілу випадкової величини ζ - $\zeta(\xi;\eta)$. Знайти математичні очікування та дисперсії $m_\xi, m_\eta, m_\zeta, D_\xi, D_\eta, D_\zeta$

$\begin{cases} C_1 e^{-x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 / 2x^2, x \ge 1 \\ 0, x < 1 \end{cases}$	$\zeta = \zeta(\xi;\eta)$: $\min(\xi^3, \eta)$

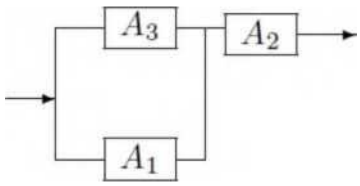
Варіант 5

1. Гральний кубик підкидається два рази поспіль. Описати простір елементарних фіналів Ω. Описати подію А, що складається в тому, що хоча б один раз випала одиниця, подія В, складається в тому, що сума очок, що випали при першому і другому підкиданні, непарна.

2. У шаховому турнірі беруть участь 10 осіб, які розбиваються на пари за жеребом. Яка ймовірність того, що два найсильніших шахіста потраплять в одну пару?

3. В коло одиничного радіуса навмання кинуто п'ять точок. З якою ймовірністю відстань від меж кола до найближчої точки виявиться не менше 1/3?

4. Електричне коло складається з елементів A_k, з'єднаних за наступною схемою:



Ймовірність виходу з ладу елемента A_k дорівнює 0,1. Передбачається, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що ланцюг не буде пропускати струм.

5. На збірку надходять деталі з двох автоматів. Перший автомат дає 80%, а другий 20 % всіх деталей, необхідних для збірки. Брак в продукції першого автомата становить 1%, а другого 4 %. Деталь, виготовлена автоматом, виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на першому автоматі?

6. Імовірність відмови сервера при кожному з незалежних з'єднання через модем дорівнює 0,3. Спроби підключення проводяться до встановлення зв'язку. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа вироблених спроб підключення, якщо число спроб обмежена чотирма. Побудувати графік функції розподілу

7. Закон Релея з щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} Axe^{-x^2/(2\sigma^2)} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

в ряді випадків описує розподіл терміну служби електронної апаратури. Знайти коефіцієнт А, математичне сподівання і дисперсію. (Рекомендується використовувати таблиці визначених інтегралів).

8. На 4 картках написані цифри від 1 до 4. Знайти спільний розподіл числа, написаного на обраної навмання картці, і індикатора того, що це число

парне. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Кількість води, що витрачається жителями однієї квартири на добу, має показовий розподіл із середнім значенням 100 літрів. Знайти, якої кількості води достатньо з ймовірністю 0,98 для задоволення потреб мешканців 250000 квартир.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра θ >0 за першим моментом і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормального розподілу з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

4,83 -1,10 13,11 10,84 9,45 8,56 7,87 7,34 -4,06 3,48 4,70 7,13 -1,08
4,53 13,56 2,66 7,29 9,41 11,86 9,54 10,86 2,50 -2,84 11,21 8,93

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

16. 0,32 0,49 1,12 1,98 0,25 1,52 0,52 0,03 1,10 1,59 0,27 1,30 1,79 1,93 0,23 1,84 1, 04

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону ($n = 7, p = 0.18$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм.
(a =20, σ= 1, α =5, β=10, δ= 2)

15. Нехай ξ та η незалежні випадкові величини з щільностями $p_\xi(x, C_1)$ та

$p_\eta(x,C_2)$ відповідно (C_1 та C_2 - константи). Знайти значення констант C_1 та C_2. Знайти функції розподілу випадкових величин ξ та η. Знайти функцію розподілу випадкової величини ζ - $\zeta(\xi;\eta)$. Знайти математичні очікування та дисперсії $m_\xi, m_\eta, m_\zeta, D_\xi, D_\eta, D_\zeta$

$\dfrac{C_1}{1+x^2}$	$C_2 e^{-x^2}$	$\zeta=\zeta(\xi;\eta)$: $3+2\xi$

Варіант 6

1. Нехай А, В, С - довільні події. Знайти вираз для події, що складається в тому, що з А, В і С відбулося хоча б дві події.

2. Шість книг на полиці розставлені випадковим чином. Знайти ймовірність того, що дві певні книги опиняться поруч (в будь-якому порядку).

3. Дві особи А і В мають однакову ймовірність прийти до вказаного місця в будь-який момент часу між 12 і 13 годинами. Особа А чекає іншого протягом 10 хвилин, після чого йде; особа В чекає іншого протягом 15 хвилин. Знайти ймовірність того, що А і В зустрінуться.

4. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,7. за мішені стріляють одиночними пострілами до першого попадання, після чого стрілянину припиняють. Знайти ймовірність того, що буде зроблено не більше трьох пострілів.

5. Студент вивчив до іспиту тільки 20 питань з 30. Для складання іспиту досить відповісти на два з трьох різних питань. Яка ймовірність того, що іспит буде зданий? Яка ймовірність того, що студент відповів на всі три питання, якщо відомо, що він здав іспит?

6. Користувач комп'ютера забув пароль і перебирає навмання 4 можливих. Після трьох невдалих спроб комп'ютер блокується. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа спроб. Побудувати графік функції розподілу.

7. Швидкість *V* молекул газу має щільність розподілу

$$f(v)=\begin{cases}\frac{v^2}{\sigma^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-v^2/(2\sigma^2)} & \text{при } v\ge 0;\\ 0 & \text{при } v<0\end{cases}$$

(Розподіл Максвелла). Визначити математичне сподівання *V*. (Можна використовувати таблиці визначених інтегралів).

8. У двох з чотирьох кімнат температура 20 градусів, а вологість 80 відсотків. У третій кімнаті температура 25 градусів, а вологість 90 відсотків. У четвертій кімнаті температура 20 градусів, а вологість 90 відсотків. Знайти спільний розподіл температури і вологості в обраній навмання кімнаті. Знайти коефіцієнт кореляції між температурою і вологістю.

9. Учасник лотереї кидає 6 куль, кожен з яких може потрапити в лузи з номерами від 1 до 6. Учасник отримує цінний приз, якщо сума очок менше 12. Оцінити ймовірність отримання цінного призу.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ з розподілом з щільністю розподілу $f(x)$ знайти оцінки параметра $\theta > 0$ по третьому моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2\theta} e^{-x\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

5,16 6,70 2,88 9,09 -2,06 6,25 6,46 4,25 16,16 7,07 1,35 13,58 7,96 14,64
-2,14 10,81 2,50 2,24 -1,04 5,31 11,93 16,20 7,49 -5,21 5,90 5,63 7,26

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1: на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,46 0,79 0,64 1,06 0,42 0,69 1,65 0,45 0,43 1,48 0,44 0,97 1,49 0,46 1,29 0,37 0,
45

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону $(n = 3, p = 0.67)$.

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним

законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру α більше ніж σ мм.
(a =18, σ= 2, α =10, β =24, δ= 2)

15. Нехай ξ та η незалежні випадкові величини з щільностями $p_\xi(x,C_1)$ та $p_\eta(x,C_2)$ відповідно (C_1 та C_2 - константи). Знайти значення констант C_1 та C_2. Знайти функції розподілу випадкових величин ξ та η. Знайти функцію розподілу випадкової величини ζ - $\zeta(\xi;\eta)$. Знайти математичні очікування та дисперсії $m_\xi, m_\eta, m_\zeta, D_\xi, D_\eta, D_\zeta$

$C_1 e^{-x^2/2}$	$\frac{C_1}{4+x^2}$	$\zeta=\zeta(\xi;\eta)$: $4-2\eta$

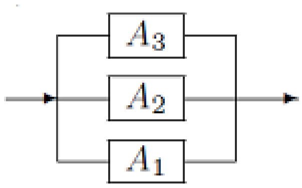
Варіант 7

1. Робочий виготовив три деталі. Нехай подія A_i полягає в тому, що i-та виготовлена ним деталь має дефект. Записати подію, що полягає в тому, що рівно одна деталь має дефект.

2. Один школяр, бажаючи пожартувати над своїми товаришами, зібрав в гардеробі все пальто, а потім розвісив їх у випадковому порядку. Яка ймовірність, що кожне пальто знову потрапило на колишнє місце, якщо в гардеробі шість гачків і на них висіло шість пальто.

3. На відрізку AB навмання вибираються дві точки M і N. Яка ймовірність того, що точка M виявиться ближче до точки N, ніж до точки A?

4. Електричне коло складається з елементів A_k, з'єднаних за наступною схемою:



Ймовірність виходу з ладу елемента A_1 дорівнює 0,1, інших елементів A_k по 0,04. Передбачається, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що ланцюг буде пропускати струм.

5. Прилад складається з двох незалежно працюючих блоків, ймовірності відмови яких за зміну рівні відповідно 0,05 і 0,08. Ймовірність виходу з ладу

приладу при відмові одного з блоків дорівнює 0,8: при відмові обох блоків 1. Визначити ймовірність виходу приладу з ладу за зміну. Знайти ймовірність того, що відмовили обидва блоки, якщо відомо, що прилад вийшов з ладу.

6. При грі з автоматом в разі виграшу гравець отримує 10 рублів. Імовірність виграшу становить 0,3. знайти суму рублів, яку гравець кидає в автомат і втрачає в разі програшу, якщо математичне сподівання виграшу одно мінус 2 рублям. (В разі програшу сума виграшу вважається негативним числом, рівним сумі програшу, взятої зі знаком «мінус».) Знайти ряд розподілу і дисперсію суми виграшу. Побудувати графік функції розподілу.

7. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини ε має вигляд $f(x) = Ae^{-2|x|}$
(розподіл Лапласа). Знайти коефіцієнт А, обчислити математичне сподівання і стандартне відхилення. Знайти ймовірність того, що випадкова величина ξ, прийме значення, більше 1.

8. В трьох з чотирьох аудиторій по 20 студентів і рівень шуму 80 децибел, а в четвертій аудиторії немає студентів і рівень шуму 20 децибел. Знайти спільний розподіл числа студентів і рівня шуму в обраній навмання аудиторії. Знайти коефіцієнт кореляції між числом студентів і рівнем шуму.

9. Кількість 10-копійчаних монет, необхідне для видачі кожної здачі в касі, приймає значення від 0 до 4 з рівними можливостями. Знайти, скільки повинно бути 10-копійчаних монет в касі, щоб з ймовірністю 0,9 їх вистачило на 2500 видач здачі.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $0 < \theta < 1$ за першим моментом і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{-(\theta+1)/\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

1,29 12,70 10,80 -10,19 4,32 12,02 13,68 3,75 -0,90 2,94 15,07 2,08 16,22 13,42 1,55 -6, 05 15,70 12,35 13,94 -0,56 24,10 7,45 3,60 -0,24 16,84 6,13 -5,28 3,00

10,04

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,28 1,13 1,78 0,65 0,55 1,02 0,88 0,76 0,57

1,71 0,62 1,69 0,15 0,23 1,99 1,53 1,91 1,57

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону ($n = 8, p = 0.32$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм.(a =36, σ = 4, α =28, β =42, δ= 3)

15. Нехай ξ та η незалежні випадкові величини з щільностями $p_\xi(x,C_1)$ та $p_\eta(x,C_2)$ відповідно (C_1 та C_2 - константи). Знайти значення констант C_1 та C_2. Знайти функції розподілу випадкових величин ξ та η. Знайти функцію розподілу випадкової величини ζ - $\zeta(\xi;\eta)$. Знайти математичні очікування та дисперсії $m_\xi, m_\eta, m_\zeta, D_\xi, D_\eta, D_\zeta$

$\begin{cases} C_1 e^{-x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-2x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\zeta = \zeta(\xi;\eta)$: ξ / η

Варіант 8

1. Навмання кинуті три монети. Описати події: А - хоча б на одній випала решка, В - хоча б на двох випав орел. Описати також подія АВ.

2. Номер лотерейного квитка складається з 3 цифр. Яка ймовірність того, що всі цифри взятого навмання квитка виявляться різними?

3. На відрізку одиничної довжини навмання поставлені дві точки, в результаті чого цей відрізок виявляється розділеним на три частини. Визначити ймовірність того, що довжина хоча б однієї з перших двох одержані частин не перевищує 2/3.

4. По мішені по одному разу стріляють 3 стрілка. Ймовірність влучення для першого дорівнює 0,5, для другого - 0,6, для третього - 0,7. Знайти ймовірність рівно двох влучень.

5. У семи урнах міститься по 2 білих і 2 чорних кулі, а в трьох урнах по 7 білих і 3 чорних кулі. Яка ймовірність, що з урни, взятої навмання, буде витягнуто біла куля? Знайти ймовірність, що куля витягнута з урни з 7 білими і 3 чорними кулями, якщо він виявився білим.

6. Прилад складається з трьох малонадійних елементів. Відмови елементів за певний період часу незалежні, а їх ймовірності дорівнюють відповідно 0,1; 0,2; 0,3. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа відмовивших елементів. Побудувати графік функції розподілу.

7. Точка M рухається по осі Ox згідно із законом $x = at^2$.У випадковий момент часу, рівномірно розподілений на відрізку [0;1], спостерігається положення ξ точки M. Знайти щільність розподілу, математичне сподівання і стандартне відхилення випадкової величини ξ.

8. Чотири поїзди метро, що йдуть з інтервалом в 4 хвилини, відвезли по 200 пасажирів. Чотири поїзди, що йдуть з інтервалом в 6 хвилин, відвезли по 100 пасажирів. Два потяги, що йдуть з інтервалом в 8 хвилин, відвезли по 50 пасажирів. Знайти спільний розподіл числа пасажирів і інтервалу руху для обраного навмання поїзда. Знайти коефіцієнт кореляції.

9. Кількість бракованих виробів в коробці має розподіл Пуассона з параметром 3. Знайти ймовірність того, що в 25 коробках менше 100 бракованих виробів.

10. Для вибірки (X_1, X_2, ..., X_n) з розподілу з щільністю розподілу f(x) знайти оцінки параметра θ > 3 по другому моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 1)x^{-\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

14,92 7,48 2,82 22,84 7,49 8,98 13,84 14,17 7,07 9,69 -8,35 12,77 14,93 5,81 8,62 11,22 3,85 2,86 9,52 15,93 9,43 19,48 19,19 12,20 19,40 12,09 8,47 6,79

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0.001.

1,91 0,91 0,30 1,34 0,61 1,12 1,00 0,53 1,58 0,62

0,41 0,89 1,20 1,51 0,78 1,44 0,46 0,69 1.33

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону ($n = 10, p = 0.87$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням a , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм.
(а =64, σ= 8, α =60, β =70, δ= 5)

15. Нехай ξ та η незалежні випадкові величини з щільностями $p_\xi(x, C_1)$ та $p_\eta(x, C_2)$ відповідно (C_1 та C_2 - константи). Знайти значення констант C_1 та C_2. Знайти функції розподілу випадкових величин ξ та η. Знайти функцію розподілу випадкової величини ζ - $\zeta(\xi;\eta)$. Знайти математичні очікування та дисперсії $m_\xi, m_\eta, m_\zeta, D_\xi, D_\eta, D_\zeta$

$\begin{cases} C_1 e^{-x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-4x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\zeta = \zeta(\xi;\eta)$: $\xi \cdot \eta$

Варіант 9

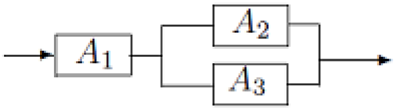
1. З колоди карт в 52 аркуша навмання виймаються три карти (без повернення). Описати простір елементарних фіналів, а також подію, яка полягає в тому, що серед цих трьох карт виявиться рівно один туз.

2. У бригаді 3 робочих. Яка ймовірність того, що принаймні двоє з них народилися в один і той же день тижня? Вважати, що ймовірності народитися в кожен з днів однакові.

3. На відрізку одиничної довжини навмання поставлені дві точки, в

результаті чого цей відрізок виявляється розділеним на три частини. Визначити ймовірність того, що довжина кожної з трьох одержаних частин не перевищує 3/4.

4. Електричне коло складається з елементів A_k, з'єднаних за наступною схемою:



Ймовірність виходу з ладу елемента A_2 дорівнює 0,01, інших елементів A_k - по 0,1. Передбачається, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що ланцюг буде пропускати струм.

5. Телеграфне повідомлення складається з сигналів «точка» і «тире». Відомо, що серед переданих сигналів «точка» і «тире» зустрічаються у відношенні 3: 2. Через перешкод спотворюється в середньому 25% сигналів «точка» і 20 % сигналів «тире», причому «точка» спотворюється в «тире», а «тире» в «точку». Знайти ймовірність спотворення сигналу. Визначити ймовірність того, що передавали «тире», якщо відомо, що прийняли «точку».

6. Два гравці грають в шахи на гроші. Відомо, що в середньому з 4 партій одну виграє перший гравець, одна закінчується внічию, і двічи виграє другий гравець. У разі програшу перший гравець платить другому 5 рублів. Скільки він повинен отримувати в разі виграшу, щоб математичне сподівання його виграшу дорівнювало нулю? Знайти ряд розподілу і дисперсію суми виграшу (негативна сума виграшу - це сума програшу, взята зі знаком «мінус»). Побудувати графік функції розподілу.

7. Випадкова величина ε має щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} & \text{при } x \in [a;\ \infty); \\ 0 & \text{при} x < a \end{cases}$$

Знайти нормуємо константу А, обчислити математичне сподівання. Побудувати графік щільності розподілу при а= σ = 1.

8. В під'їзді 15 однокімнатних квартир площею по 50 кв. м., 10 двокімнатних квартир по 70 кв. м. і 5 трикімнатних квартир по 80 кв. м. Для обраної навмання квартири знайти спільний розподіл числа кімнат і площі. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Сумарний час роботи машини складається з 10 000 інтервалів часу, кожен з яких вимірюється зі стандартним відхиленням в 1 хвилину. Знайти ймовірність того, що фактичний час роботи відрізняється від виміряного

більше, ніж на1 година.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ за першим моментом і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

22,59 -2,61 11,87 1,37 5,92 -5,10 5,38 14,71 7,55 3,91 1,23 8,50 -5,58 -1,97 17,93 9 , 42 11,99 9,39 4,78 5,43 9,40 8,68 2,20 7,15 14,78 14,77 -15,16

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

1,49 1,96 0,64 0,76 0,01 0,82 0,23 0,82 1,96

1,28 1,49 1,07 1,92 0,17 1,68 1,01 0,48

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону ($n = 4, p = 0.25$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких α мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленям σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру α більше ніж σ мм. (a =18, σ = 2, α =12, β =27, δ= 1.5)

15. Спільний закон розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 задається таблицею. Знайти та побудувати графіки $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$. Перевірити, чи виконуються для даних функцій властивості функції розподілу. Знайти

$m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, D_{\xi_1}, D_{\xi_2}$. З’ясувати чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними. Знайти сумісний закон розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ та $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Знайти $m_{\eta_1}, m_{\eta_2}, D_{\eta_1}, D_{\eta_2}$

	$\xi_1 \setminus \xi_2$	-1	0	1
	-1	1/8	1/4	1/8
	1	1/16	1/16	3/8

Варіант 10

1. Кинуті дві гральні кістки. Нехай подія А полягає в тому, що випала сума очок непарна, а подія В в тому, що хоча б на одній з кісток випала трійка. Описати події АВ і $\overline{AB}$.

2. З повного набору кісток доміно навмання беруться п'ять кісток. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б одна з шісткою.

3. На лінійці навмання поставлені 2 точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними виявиться більше половини довжини лінійки?

4. Два стрільці по черзі стріляють по одній і тій же мішені. У кожного стрільця 2 патрона. При першому попаданні стрілянина припиняється. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрільця 0,3, для другого - 0,4. Знайти ймовірність того, що обидва стрілка витратять весь свій боєзапас.

5. Перше знаряддя 2-гарматної батареї пристреляно так, що ймовірність попадання для нього дорівнює 3/11. Для другої гармати вона дорівнює 1/5. Батарея дала залп по цілі. Знайти ймовірність того, що мета вражена. Знайти ймовірність того, що перша гармата потрапило в ціль, якщо відомо, що мета була вражена. Для ураження цілі достатньо одного попадання.

6. Імовірність прийому окремого сигналу дорівнює 0,15. Радіосигнал передається 4 рази. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа прийнятих сигналів. Побудувати графік функції розподілу. Знайти ймовірність того, що прийнятих сигналів буде не менше 2, але не більше 3.

7. Радіус кола є випадковою величиною, рівномірно розподіленим на відрізку | 0; 1]. Знайти щільність розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію площі кола. Знайти ймовірність того, що площа перевершує π / 16. Накреслити графіки щільності розподілу і функції розподілу.

8. У відділі працює один співробітник з двома вищими освітами,

автор 6 винаходів, чотири співробітника з вищою освітою, кожен з яких є автором одного винаходу, і чотири співробітники без вищої освіти, на рахунку яких винаходів немає. Для обраного навмання співробітника знайти спільний розподіл кількості винаходів і вищих освіт. Обчислити коефіцієнт кореляції між ними.

9. Час очікування автобуса пасажиром має показовий розподіл із середнім значенням 10 хвилин. Знайти межі, в яких з ймовірністю 0,8 лежить сумарний час, витрачений на очікування автобуса за 48 поїздок.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ за першим моментом і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11.Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

9,36 19,48 3,89 4,45 15,11 15,90 24,94 1,72 3,25 -3,77 12,17 10,08 14,36
9,39 1,27 7,89 8,68 1,59 10,57 3,21 -6,11 15,61 10,82 1,68 5,63 6,79
20,27 -2,15

12.За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,46 1,43 0,40 1,23 1,40 0,76 1,09 1,65 1,32
1,24 1,39 0,81 0,39 0,76 1,14 1,24 1,69 1,58

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону ($n = 12, p = 0.41$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним

очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (a =48, σ = 4, α =32, β =52, δ= 4)

15. Спільний закон розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 задається таблицею. Знайти та побудувати графіки $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$. Перевірити, чи виконуються для даних функцій властивості функції розподілу. Знайти $m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, D_{\xi_1}, D_{\xi_2}$. З'ясувати чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними. Знайти сумісний закон розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ та $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Знайти $m_{\eta_1}, m_{\eta_2}, D_{\eta_1}, D_{\eta_2}$

$\xi_1 \setminus \xi_2$	-1	0	1
-1	1/8	1/4	1/8
0	1/16	1/16	3/8

Варіант 11

1. Події: А - хоча б один з трьох перевірених приладів бракований, В усі прилади доброякісні. Що означають події $A \cup B$ і АВ?

2. У ящику лежать 3 чорних і 3 білих кулі. Знайти ймовірність того, що при послідовному випадковому витягу куль з ящика спочатку виймуть всі білі кулі.

3. На відрізку одиничної довжини навмання поставлені дві точки, в результаті чого цей відрізок виявляється розділеним на три частини. Визначити ймовірність того, що довжина кожної з трьох одержаних частин не менше 2/3.

4. Імовірність виготовлення неякісної деталі дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що з 4 деталей знайдеться хоча б одна якісна.

5. Запит абонента автоматично з рівними можливостями направляється на один з двох серверів. Імовірність виявлення збою в роботі першого сервера дорівнює 0,1, другого- 0,01. Яка ймовірність того, що запит буде обслужений без збою? Яка ймовірність того, що абонент обслуговувався на першому сервері, якщо відомо, що він був обслужений без збою?

6. Ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,8 при кожному пострілі. Стрілянина ведеться одиночними пострілами до першого попадання, поки не буде витрачений боєзапас. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і

дисперсію числа вироблених пострілів, якщо боєзапас становить 4 одиниці. Побудувати графік функції розподілу.

7. Крапку кидають навмання в кулю радіуса R. Випадкова величина ξ –відстань від точки до центру кулі. Знайти функцію розподілу, щільність розподілу, математичне сподівання і стандартне відхилення випадкової величини ξ. Знайти ймовірність того, що ε прийме значення, більше половини радіуса кулі. Накреслити графіки щільності розподілу і функції розподілу.

8. Скласти таблицю спільного розподілу числа випавших двійок і числа випавших парних чисел при одному підкиданні грального кубика. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Учасник лотереї кидає гральну кістку 20 разів. Учасник отримує цінний приз, якщо сума очок більше 90. Оцінити ймовірність отримання цінного призу.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 3$ за першим моментом і методом максимальної правдоподібності. перевірити спроможність оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 1)x^{-\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

1,87 1,26 1,58 2,11 0,01 1,35 2,05 0,76 1,65 1,61 0,12 2,03 1,07 1,10
3,06 0,38 0,64 1,63 0,54 2,65 0,82 1,21 0,73 1,99 2,44 0,93 0,47 0,88

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0.001.

0,46 0,68 0,59 1,97 1,03 0,62 0,89 1,93 0,88 1,66 1,34 1,99 0,59 0,00 0,46 1,48 1, 35 1,74

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_{\xi}(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена за законом Пуассона ($k = 5, \lambda = 0.026$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (а =15, σ = 2, α =12, β =16, δ= 1,6)

15. Спільний закон розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 задається таблицею. Знайти та побудувати графіки $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$. Перевірити, чи виконуються для даних функцій властивості функції розподілу. Знайти $m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, D_{\xi_1}, D_{\xi_2}$. З'ясувати чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними. Знайти сумісний закон розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ та $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Знайти $m_{\eta_1}, m_{\eta_2}, D_{\eta_1}, D_{\eta_2}$

	$\xi_1 \setminus \xi_2$	-1	0	1
	0	1/8	1/4	1/8
	1	1/16	1/16	3/8

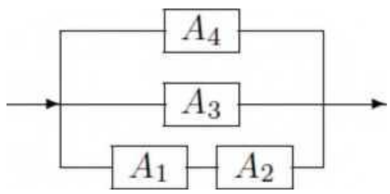
Варіант 12

1. Дві гральні кістки кидаються n раз, $n \geq 6$. Нехай подія A означає, що кожна з шести комбінацій (1,1), ..., (6,6) з'явиться щонайменше один раз. Описати заперечення події А, використовуючи операції над подіями.

2. Кидають 4 гральні кістки. Яка ймовірність того, що на них випадуть тільки «5» і «6»?

3. На відрізку одиничної довжини навмання поставлені дві точки, в результаті чого цей відрізок виявляється розділеним на три частини. Визначити ймовірність того, що довжина максимальної частини з трьох одержаних частин не перевищує 4/5.

4. Електричне коло складається з елементів *Ак,* з'єднаних за наступною схемоюу



Ймовірність виходу з ладу кожного елемента A_k дорівнює 0,02. Передбачається, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що ланцюг буде пропускати струм.

5. Однакові деталі надходять на складання з трьох заводів. Перший завод дає 10%, другий 40 %, третій 50 *% всіх* деталей, необхідних для збірки. Брак в продукції першого заводу становить - 2%, другого - 3 %, третього - 4 %. Знайти ймовірність надходження на збірку бракованої деталі. Знайти ймовірність того, що виявлена бракованої деталь виготовлена на першому заводі.

6. Для трьох саджанців ймовірності успішно винести пересадку рівні 0,7, 0,8 і 0,85. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа винесли пересадку саджанців. Побудувати графік функції розподілу.

7. Розподіл Парето наближено описує розподіл доходів фізичних осіб. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^{\alpha+1}} & \text{при } x \geq \theta; \\ 0 & \text{при } x < \theta. \end{cases}$$

де $\alpha > 1$, $\theta > 0$ - параметри розподілу, A нормуєма константа. Знайти константу A. Обчислити значення параметра α, при якому математичне очікування переверщує значення параметра θ в 10 разів.

8. Підкидаються три симетричних монети. Скласти таблицю спільного розподілу кількостей випавших гербів на перших двох монетах і на останніх двох монетах. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Час очікування тролейбуса за одну поїздку має рівномірний розподіл на відрізку від 0 до 15 хвилин. Оцінити ймовірність того, що сумарний час очікування за 10 поїздок виявиться менше 1,5 годин.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ по другому моменту і методом максимальної правдоподібності. перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} e^{-x^2/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

розподілу дорівнює

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами.

Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

3,50 0,80 0,32 3,31 1,12 3,29 3,87 2,65 2,01 2,65 1,19 -0,85 4,07 1,23 3,38 5,17 1 , 51 2,20 5,41 1,22 1,89 2,02 3,17 -1.02 2,73 1,10 3,87

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

1,42 1,25 0,87 0,54 0,48 1,20 1,79 0,62 0,75 0,55

0,46 1,02 1,71 1,91 0,83 0,99 1,46 1,09 0,94

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_{\xi}(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена за законом Пуассона ($k = 14, \lambda = 0.38$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину Х, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням a , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм.(а =27, σ = 3, α =20, β =35, δ= 2,5)

15. Спільний закон розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 задається таблицею. Знайти та побудувати графіки $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$. Перевірити, чи виконуються для даних функцій властивості функції розподілу. Знайти $m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, D_{\xi_1}, D_{\xi_2}$. З'ясувати чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними. Знайти сумісний закон розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ та $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Знайти $m_{\eta_1}, m_{\eta_2}, D_{\eta_1}, D_{\eta_2}$

4	$\xi_1 \setminus \xi_2$	-2	-1	0
	-1	1/8	1/4	1/8
	0	1/16	1/16	3/8

Варіант 13

1. Знайти випадкову подію Х з рівності

$$\overline{X + A} + \overline{X + \overline{A}} = B.$$

2. У студентській групі 10 юнаків і 15 дівчат. На університетський святковий бал група отримала тільки 3 запрошувальних квитка, які розігруються за жеребом. Яка ймовірність того, що на бал потраплять три дівчини?

3. На відрізку одиничної довжини навмання поставлені дві точки, в результаті чого цей відрізок виявляється розділеним на три частини. Визначити ймовірність того, що довжина мінімальної частини з трьох одержаних частин не перевищує 4/5.

4. Системний адміністратор обслуговує 4 сервера, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що протягом робочого дня сервер не потребуватиме уваги адміністратора, дорівнює для першого івторого сервера 0,8, для третього і четвертого 0,10. Знайти ймовірність того, що хоча б один з серверів не зажадає уваги адміністратора.

5. Фірма поширює 2 види рекламних листівок А і В, причому кількості листівок двох видів знаходяться в співвідношенні 2: 3. На листівку виду А позитивно реагують 20% одержувачів, на листівку виду В 10 % одержувачів. Знайти ймовірність позитивної реакції одержувача листівки. Знайти ймовірність того, що отримана листівка виду А, якщо відомо, що реакція була позитивною.

6. Ймовірність влучення баскетбольного м'яча в кільце при киданні початківцям спортсменом дорівнює 1/5. М'яч кидають до першого попадання, але дають не більше 5 спроб. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа промахів. Побудувати графік функції розподілу.

7. Швидкість автомобіля на дистанції в 100 км є випадковою величиною, рівномірно розподіленим на відрізку від 40 км / год до 80 км / год. Знайти математичне сподівання і стандартне відхилення часу, витраченого на подолання дистанції. Знайти ймовірність того, що цей час перевищить 2 години.

8. В групі з 20 студентів тільки двоє пропустили більше половини занять, і саме вони отримали оцінку «2» на іспиті. З інших студентів 5 осіб отримали оцінку «5», 10 осіб оцінку «4», і 3 студента отримали «трійки». Скласти таблицю спільного розподілу оцінки на іспиті і індикатора пропуску більше половини занять для обраного навмання студента. Знайти коефіцієнт кореляції.

9. Число серіалів, що переглядаються за день обраним навмання студентом, має розподіл Пуассона з параметром 0,5. Знайти межі, в яких з ймовірністю 0,8 лежить число переглядів серіалів за день студентами групи з 20 осіб.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ по третьому моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^2} e^{-x^3/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартнм) відхиленн, і графік оцінки щільності розподілу.

8,16 3,33 7,35 3,05 2,54 1,91 1,77 2,92 5,95 2,31 0,27 5,12 6,60 -1,58 5,42 5,67 6 , 28 -0,09 2,74 2,45 1,11 6,97 -1,59 -1,41 2,69 4,99 7,24 1,75 4,76

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

1,94 1,42 0,61 2,00 0,59 0,58 1,18 1,58 1,01 0,57

0,05 0,25 0,17 1.30 0,52 0,91 0,84 1,66 1,24

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена за законом Пуассона ($k = 6, \lambda = 0.033$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (а =65, σ = 8, α =30, β =70, δ= 4)

15. Спільний закон розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 задається таблицею. Знайти та побудувати графіки $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$. Перевірити, чи виконуються для даних функцій властивості функції розподілу. Знайти $m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, D_{\xi_1}, D_{\xi_2}$. З'ясувати чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними. Знайти сумісний закон розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ та $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Знайти $m_{\eta_1}, m_{\eta_2}, D_{\eta_1}, D_{\eta_2}$

	$\xi_1 \setminus \xi_2$	0	1	2
	0	1/8	1/4	1/8
	1	1/16	1/16	3/8

Варіант 14

1. Нехай A, B і C - події. Який сенс рівності $ABC = A$ і A∪ B ∪ C=A. Привести приклади.

2. Перша вибрана навмання з 28 кісток доміно не опинилася дублем. Знайти ймовірність того, що другу також взяту навмання кістку можна приставити до першої згідно з правилами гри.

3. Зустрічні потяги приходять на станцію в випадкові моменти часу протягом доби. Один поїзд стоїть на станції 30 хвилин, інший 40 хвилин. Знайти ймовірність зустрічі поїздів на станції.

4. Призначений до друку текст перевіряється спочатку автором, потім редактором. Автор знаходить в середньому 80% допущених в тексті помилок, редактор 90% з решти помилок. Знайти ймовірність того, що будуть виправлені всі 4 помилки, які містяться в первинному тексті.

5. Імовірність того, що виріб відповідає стандарту, дорівнює 0,8. На заводі прийнята система з трьох незалежних випробувань, кожне з яких виріб, що задовольняє стандарту, проходить з ймовірністю 0,9, а не задовольняють - з ймовірністю 0,3. Яка ймовірність того, що навмання взятий виріб витримає випробування? Яка ймовірність того, що виріб, що витримало випробування, задовольняє стандарту?

6. Імовірність успішного з'єднання комп'ютера з сервером дорівнює 0,6. Спроби з'єднання виробляються до встановлення з'єднання, але не більше 6 спроб. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа спроб з'єднання. Побудувати графік функції розподілу.

7. Потужність W, що виділяється на опорі R, обчислюється за законом W= U^2/R, де U - напруга в мережі. Передбачається, що напруга - випадкова величина, розподілена рівномірно на відрізку від 200 до 250 вольт. Знайти

щільність розподілу і математичне очікування потужності, що виділяється на опорі в 100 Ом. Знайти ймовірність того, що потужність перевищить 500 Вт.

8. В офісі 4 кімнати. У першій кімнаті 2 співробітника, а комп'ютерів немає, в другій 4 комп'ютери і 1 співробітник, в інших двох по 2 комп'ютери і по 2 співробітники. Знайти спільний розподіл числа співробітників і числа комп'ютерів в обраній навмання кімнаті. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Зважують вантаж, що знаходиться в 200 мішках. Похибка вимірювань ваги кожного з них розподілена за нормальним законом з нульовим середнім і стандартним відхиленням 100 грам. Знайти ймовірність того, що сумарна похибка за абсолютною величиною менше 1 кг.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ за першим моментом і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta^2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним средньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

1,07 -0,72 -4,46 -3,24 2,42 -1,70 -1,24 -0,07 6,20 2,67 1,80 0,26 9,61
2,51 1,44 -3,65 5,50 4,17 -2,06 7,48 2,60 7,61 2,54 9,77 9,67 7,36 7,86
11,22 3,38

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те,

приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1: на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,06 1,44 0,70 1,33 0,74 0,61 1,03 1,25 0,85

0,81 1,04 0,76 0,80 1,55 1,61 0,82 1,70 1,63

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена за законом Пуассона ($k = 9, \lambda = 0.218$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину Х, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм.
(a =28, σ= 1, α =20, β =32, δ= 3)

15. Спільний закон розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 задається таблицею. Знайти та побудувати графіки $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$. Перевірити, чи виконуються для даних функцій властивості функції розподілу. Знайти $m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, D_{\xi_1}, D_{\xi_2}$. З'ясувати чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними. Знайти сумісний закон розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ та $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Знайти $m_{\eta_1}, m_{\eta_2}, D_{\eta_1}, D_{\eta_2}$

$\xi_1 \setminus \xi_2$	-2	0	1
-1	1/8	1/4	1/8
1	1/16	1/16	3/8

Варіант 15

1. Кинуті три монети. описати події

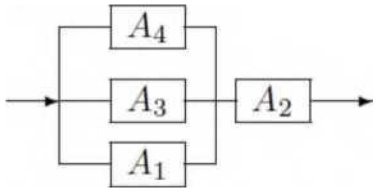
A = {випало не більш двох гербів і принаймні одна решка} і

B = {випав принаймні один герб і хоча б одна решка}. Описати також події AB, $\overline{\text{AB}}$.

2. У шаховому турнірі беруть участь 16 осіб, які розбиваються на пари за жеребом і грають за олімпійською системою (хто програв вибуває з гри, нічиїх немає). Яка ймовірність того, що другий за силою шахіст не потрапить до фіналу?

3. На відрізку одиничної довжини навмання поставлені дві точки, в результаті чого цей відрізок виявляється розділеним на три частини. Визначити ймовірність того, що сума довжин перших двох частин не перевищує довжини останньої частини.

4. Електричне коло складається з елементів A_k, з'єднаних за наступною схемою:



Ймовірність виходу з ладу елемента A_k дорівнює 0,1. Передбачається, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що що ланцюг не буде пропускати струм.

5. На збірку надходять деталі з трьох автоматів. Перший автомат дає 50%, а другий 30 % всіх деталей, необхідних для збірки. Брак в продукції першого автомата становить 1%, другого - 2 %, а третього 4%. Деталь, виготовлена автоматом, виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на першому автоматі?

6. Імовірність відмови сервера при кожному з незалежних з'єднання через модем дорівнює 0,2. Спроби підключення проводяться до встановлення зв'язку. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа вироблених спроб підключення, якщо число спроб обмежена п'ятьма. Побудувати графік функції розподілу.

7. Закон Ерланга з щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2e^{-\alpha x} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

описує розподіл часу прибуття двох викликів в пуассоновском потоці. Знайти коефіцієнт А, математичне сподівання і дисперсію. (Рекомендується використовувати таблиці визначених інтегралів). Побудувати графік щільності розподілу.

8. На 5 картках написані цифри від 1 до 5. Знайти спільний розподіл числа, написаного на обраної навмання картці, і індикатора того, що це число непарне. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Кількість води, що витрачається жителями однієї квартири на добу, має показовий розподіл із середнім значенням 200 літрів. Знайти, з якою ймовірністю для задоволення потреб мешканців 500 квартир буде досить 12 000 літрів води.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ за першим моментом і методом максимальної

правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} e^{-x/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичного (стандартного) відхилення, і графік оцінки щільності розподілу.

5,38 -1,10 13,11 10,84 9,45 8,56 7,87 7,34 -4,06 3,48 4,70 7,13 -1,08
4,53 13,56 2,66 7,29 9,41 11,86 9,54 10,86 2,50 -2,84 11,21 8,93

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1: на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

1,23 0,49 1,12 1,98 0,25 1,52 0,52 0,03 1,10 1,59 0,27 1,30 1,79 1,93 0,23 1,84 1,04

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена за законом Пуассона ($k = 7, \lambda = 0.65$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (а =46, σ= 3,5, α =35, β =55, δ= 3)

15. Спільний закон розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 задається таблицею. Знайти та побудувати графіки $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$. Перевірити, чи виконуються для даних функцій властивості функції розподілу. Знайти $m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, D_{\xi_1}, D_{\xi_2}$. З’ясувати чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними.

Знайти сумісний закон розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ та $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Знайти $m_{\eta_1}, m_{\eta_2}, D_{\eta_1}, D_{\eta_2}$

7	$\xi_1 \setminus \xi_2$	-2	0	2
	1	1/8	1/4	1/8
	2	1/16	1/16	3/8

Варіант 16

1. Випадкова точка А навмання вибирається в прямокутнику зі сторонами 1 і 2. Описати подію, що означає, що відстань від А до кожної сторони прямокутника не перевищує 1/2.

2. На полиці у випадковому порядку розставлені 8 книг, в тому числі двотомник Мандельштама. Знайти ймовірність того, що один з томів Мандельштама виявиться біля правого краю полки, а інший у лівого.

3. На відрізку одиничної довжини навмання поставлені дві точки, в результаті чого цей відрізок виявляється розділеним на три частини. Визначити ймовірність того, що сума довжин останніх двох частин не перевищує довжини першої частини.

4. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,9. за мішені стріляють одиночними пострілами до першого попадання, після чого стрілянину припиняють. Знайти ймовірність того, що буде зроблено більше трьох пострілів.

5. Студент вивчив до іспиту тільки 30 питань з 40. Для складання іспиту досить відповісти на два з чотирьох різних питань. Яка ймовірність того, що іспит буде зданий? Яка ймовірність того, що студент відповів на всі чотири питання, якщо відомо, що він здав іспит?

6. Користувач комп'ютера забув пароль і перебирає навмання 6 можливих. Після трьох невдалих спроб комп'ютер блокується. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа спроб. Побудувати графік функції розподілу.

7. Час досягнення стандартним броунівським рухом рівня a має щільність розподілу

$$f(t) = \begin{cases} At^{-3/2}e^{-a^2/(2t)} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Знайти нормується константу А. Довести, що математичне очікування часу досягнення не існує. (Зробити заміну $a/\sqrt{t}$=y. Можна використовувати таблиці визначених інтегралів).

8. В Протягом трьох днів тижня температура була 30 градусів, а вологість 60 відсотків. Протягом інших трьох днів температура 20 градусів, а вологість 90 відсотків, а в останній день 10 градусів і 100 відсотків. Знайти спільний розподіл температури і вологості в обраний навмання день. Знайти коефіцієнт кореляції між температурою і вологістю.

9. Учасник лотереї кидає 5 куль, кожен з яких може потрапити в лузи з номерами від 1 до 6. Учасник отримує цінний приз, якщо сума очок більше 23. Оцінити ймовірність отримання цінного призу.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ по третьому моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2\theta^2} e^{-x\sqrt{x}/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним среднеквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

4,61 6,70 2,88 9,09 -2,06 6,25 6,46 4,25 16,16 7,07 1,35 13,58 7,96 14,64
-2,14 10,81 2,50 2,24 -1,04 5,31 11,93 16,20 7,49 -5,21 5,90 5,63 7,26

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

1,64 0,79 0,64 1,06 0,42 0,69 1,65 0,45 0,43
1,48 0,44 0,97 1,49 0,46 1,29 0,37 0,45

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її

допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена за законом Пуассона ($k = 3, \lambda = 0.816$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням a , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (a =55, σ = 6, α =40, β =60, δ= 3.6)

15. Спільний закон розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 задається таблицею. Знайти та побудувати графіки $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$. Перевірити, чи виконуються для даних функцій властивості функції розподілу. Знайти $m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, D_{\xi_1}, D_{\xi_2}$. З'ясувати чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними. Знайти сумісний закон розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ та $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Знайти $m_{\eta_1}, m_{\eta_2}, D_{\eta_1}, D_{\eta_2}$

	$\xi_1 \setminus \xi_2$	-1	0	1
	1	1/8	1/4	1/8
	1	1/16	1/16	3/8

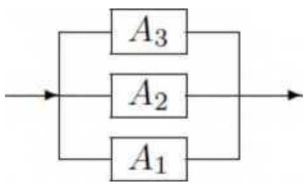
Варіант 17

1. Випадкова точка A навмання вибирається в прямокутнику зі сторонами 1 і 2. Описати подію, що означає, що відстань від A до найближчої сторони прямокутника не перевищує 1/2.

2. З колоди карт в 36 аркушів виймаються три карти. Знайти ймовірність того, що серед них виявляться хоча б дві червоні картки.

3. На відрізку AB навмання вибираються дві точки M і N. Яка ймовірність того, що точка M виявиться принаймні втричі ближче до точки N, ніж до точки A?

4. Електричне коло складається з елементів A_k, з'єднаних за наступною схемою:



Ймовірність виходу з ладу елемента A_1 дорівнює 0,1, інших елементів A_k - по 0,04. Передбачається, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що ланцюг буде пропускати струм.

5. Прилад складається з трьох незалежно працюючих блоків, ймовірності відмови яких за зміну рівні відповідно 0,01, 0,05 і 0,08. Ймовірність виходу з ладу приладу при відмові одного з блоків дорівнює 0,5; при відмові двох блоків 0,8, при відмові всіх трьох блоків - 1. Визначити ймовірність виходу приладу з ладу за зміну. Знайти ймовірність того, що відмовили всі три блоки, якщо відомо, що прилад вийшов з ладу.

6. При грі з автоматом гравець отримує 50 рублів з ймовірністю 0,1, 10 рублів з ймовірністю 0,3. Знайти суму x рублів, яку гравець кидає в автомат і втрачає в разі програшу, якщо математичне сподівання виграшу одно мінус 2 рублям. (В разі програшу сума виграшу вважається негативним числом, рівним сумі програшу, взятої зі знаком «мінус».)

Знайти ряд розподілу і дисперсію суми виграшу. Побудувати графік фун кції розподілу.

7. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини ε має вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{1+\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^2} & \text{при } |x| \le \theta; \\ 0 & \text{при } |x| > \theta \end{cases}$$

(Розподіл Коші). Знайти коефіцієнт A, обчислити математичне сподівання і стандартне відхилення. Знайти ймовірність того, що випадкова величина ε прийме значення, більше $\theta/\sqrt{3}$

8. У двох з чотирьох аудиторій по 20 студентів і рівень шуму 60 децибел, у третій 10 студентів і рівень шуму 50 децибел, а в четвертій аудиторії немає студентів і рівень шуму 20 децибел. Знайти спільний розподіл числа студентів і рівня шуму в обраній навмання аудиторії. Знайти коефіцієнт кореляції між числом студентів і рівнем шуму.

9. Кількість 10-копійчаних монет, необхідне для видачі кожної здачі в касі, приймає значення від 0 до 4 з рівними можливостями. Знайти, з якою ймовірністю на 100 видач здачі буде досить 220 10-копійчаних монет.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $1 < \theta < 2$ за першим моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta-1} x^{-\theta/(\theta-1)} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

2,92 12,70 10,80 -10,19 4,32 12,02 13,68 3,75 -0,90 2,94 15,07 2,08 16,22 13,42 1,55 -6,05 15,70 12,35 13,94 -0,56 24,10 7,45 3,60 -0,24 16,84 6,13 -5,28 3,00 10 , 04

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0;2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

1,82 1,13 1,78 0,65 0,55 1,02 0,88 0,76 0,57

1,71 0,62 1.69 0,15 0,23 1,99 1,53 1,91 1,57

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена за законом Пуассона ($k = 8, \lambda = 0.74$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм.
(a =12, σ= 6, α =4, β =15, δ= 1,2)

15. Спільний закон розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 задається таблицею. Знайти та побудувати графіки $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$. Перевірити, чи виконуються для даних функцій властивості функції розподілу. Знайти $m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, D_{\xi_1}, D_{\xi_2}$. З'ясувати чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними. Знайти сумісний закон розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ та $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Знайти $m_{\eta_1}, m_{\eta_2}, D_{\eta_1}, D_{\eta_2}$

$\xi_1 \setminus \xi_2$	1	0	-1
0	1/16	1/16	1/16
1	1/16	¼	1/2

Варіант 18

1. Кинуті три гральні кістки. Описати подію, що означає, що хоча б на одній кістки з'явилася одиниця, і не більше ніж на двох випали двійки.

2. Номер лотерейного квитка складається з 6 цифр. Яка ймовірність того, що хоча б дві цифри взятого навмання квитка збігаються?

3. Стрижень одиничної довжини АВ розламаний в двох навмання вибраних точках X і $У$. З якою ймовірністю відстань між цими точками не перевищить максимального з двох відрізків AX або $AУ$?

4. За мішені по одному разу стріляють 4 стрілка. Ймовірність влучення для першого дорівнює 0,5, для другого - 0,6, для третього- 0,7, для четвертого 0,9. Знайти ймовірність рівно двох влучень.

5. У семи урнах міститься по 3 білих і 2 чорних кулі, а в трьох урнах по 7 білих і 3 чорних кулі. Яка ймовірність, що з урни, взятої навмання, буде витягнуто білу кулю? Знайти ймовірність, що куля витягнута з урни із 7 білими і 3 чорними кулями, якщо він виявився білим.

6. Прилад складається з трьох малонадійних елементів. Відмови елементів за деякий період часу незалежні, а їх ймовірності дорівнюють відповідно 0,2; 0,3; 0,4. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа відмовили елементів. Побудувати графік функції розподілу.

7. Точка М рухається по осі Ох згідно із законом $x = vt - at^2$. У випадковий момент часу, рівномірно розподілений на відрізку [0;Т], спостерігається координата ε точки M. Знайти математичне сподівання і стандартне відхилення випадкової величини ε. При v = 10 м/с, a = 10 м/c^2, Т= 3с знайти ймовірність того, що $\varepsilon > 0$.

8. Чотири автобуси, що йдуть з інтервалом в 5 хвилин, відвезли по 20 пасажирів. Два автобуси, що йдуть з інтервалом в 10 хвилин, відвезли по 30 пасажирів. Два автобуси, що йдуть з інтервалом в 15 хвилин, відвезли по 35 пасажирів. Знайти спільний розподіл числа пасажирів і інтервалу руху обраного навмання автобуса. Знайти коефіцієнт кореляції.

9. Кількість бракованих виробів в коробці має розподіл Пуассона з параметром 2. Знайти ймовірність того, що в 16 коробках більше 40 бракованих виробів.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 2$ по другому моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{-(\theta+1)} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

13,29 7,48 2,82 22,84 7,49 8,98 13,84 14,17 7,07 9,69 -8,35 12,77 14,93 5,81 8,62 11,22 3 , 85 2,86 9,52 15,93 9,43 19,48 19,19 12,20 19,40 12,09 8,47 6,79

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,19 0,91 0,30 1,34 0,61 1,12 1,00 0,53 1,58 0,62

0,41 0,89 1.20 1,51 0,78 1,44 0,46 0,69 1,33

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена за законом Пуассона ($k = 10, \lambda = 0.015$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм.(а =14, σ = 8, α =6, β =17, δ= 2)

15. Спільний закон розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 задається таблицею. Знайти та побудувати графіки $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$. Перевірити, чи виконуються для даних функцій властивості функції розподілу. Знайти $m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, D_{\xi_1}, D_{\xi_2}$. З'ясувати чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними. Знайти сумісний закон розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ та $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Знайти $m_{\eta_1}, m_{\eta_2}, D_{\eta_1}, D_{\eta_2}$

$\xi_1 \setminus \xi_2$	-1	0	1
-1	1/4	1/2	1/16
1	1/16	1/16	1/16

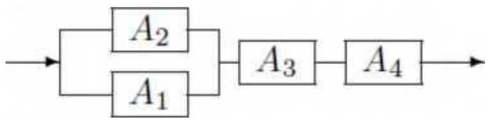
Варіант 19

1. Хтось написав n адресатам листи, в кожен конверт вклав по одному листу, і потім навмання написав на кожному конверті один з n адрес. Нехай подія A_i полягає в тому, що i-тий лист потрапив в свій конверт. Описати подію, що полягає в тому, що рівно один лист потрапил в свій конверт.

2. У бригаді 4 робочих. Яка ймовірність того, що принаймні троє з них народилися в один і той же день тижня? Вважати, що ймовірності народитися в кожен з днів однакові.

3. Стрижень одиничної довжини AB розламаний в двох навмання вибраних точках X і $У$. З якою ймовірністю відстань між цими точками не перевищить довжини відрізка AX?

4. Електричне коло складається з елементів A_k, з'єднаних за наступною схемою:



Ймовірність виходу з ладу елемента A_2 дорівнює 0,01, інших елементів A_k- по 0,1. Передбачається, що елементи виходять зі строю незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що ланцюг буде пропускати струм.

5. Телеграфне повідомлення складається з сигналів «точка» і «тире». Відомо, що серед переданих сигналів «точка» і «тире» зустрічаються відносно 7:3. Через перешкод спотворюється в середньому 25% сигналів «точка» і 20 % сигналів «тире», причому «точка» спотворюється в «тире», а «тире» в «точку». Знайти ймовірність спотворення сигналу. Визначити ймовірність того, що передавали «точку», якщо відомо, що прийняли «тире».

6. Два гравці грають в шахи на гроші. Відомо, що в середньому з 5 партій одну виграє перший гравець, дві закінчуються внічию, і дві виграє другий гравець. У разі програшу перший гравець платить другому 50 рублів. Скільки він повинен отримувати в разі виграшу, щоб математичне сподівання його виграшу дорівнювало нулю? Знайти ряд розподілу і дисперсію суми виграшу (негативна сума виграшу це сума програшу, взята зі знаком «мінус»). Побудувати графік функції розподілу.

7. Випадкова величина з, має щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases}\frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} & \text{при } |x-a|\le 2\sigma;\\ 0 & mbox\ |x-a|>2\sigma.\end{cases}$$

Знайти нормується константу A, обчислити математичне сподівання. Побудувати графік щільності розподілу при а = δ= 1.

8. У під'їзді 5 однокімнатних квартир площею по 40 кв.м., 10 двокімнатних квартир по 60 кв.м., 10 трикімнатних квартир по 70 кв.м. і 5 чотирикімнатних по 90 кв.м. Для обраної навмання квартири знайти спільний розподіл числа кімнат і площі. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Сумарний час роботи машини складається з 1000 інтервалів часу, кожен з яких вимірюється зі стандартним відхиленням в 10 хвилин. Знайти ймовірність того, що фактичний час роботи відрізняється від виміряного більше, ніж на 10 годин.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ за першим моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\theta^4}e^{-x/\theta^2} & \text{при } x>0;\\ 0 & \text{при } x\le 0.\end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

23,95 -2,61 11,87 1,37 5,92 -5,10 5,38 14,71 7,55 3,91 1,23 8,50 -5,58 -1,97 17,93 9,42 11,99 9,39 4,78 5,43 9,40 8,68 2,20 7,15 14,78 14,77 -15,16

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1: на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

2,94 1,96 0,64 0,76 0,01 0,82 0,23 0,82 1,96 1,28 1,49 1.07 1,92 0,17 1,68 1,01

0,48

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена за законом Пуассона ($k = 4, \lambda = 0.671$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням a , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (a =10, σ = 4, α =2, β =15, δ= 1.5)

15. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = 2(a - X)$, де X - випадкова величина, має щільність розподілу

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-a)^2/2}, t \in [a;\infty] \\ 0, t < a \end{cases}$$

Варіант 20

1. Хтось написав n адресатам листи, в кожен конверт вклав по одному листу і потім навмання написав на кожному конверті один з n адрес. Нехай подія A_i, полягає в тому, що і-тий лист потрапив в свій конверт. Описати подію, що полягає в тому, що рівно два листи потрапили в свої конверти.

2. Хтось написав трьом адресатам листи, в кожен конверт вклав по одному листу, і потім навмання написав на кожному конверті один з трьох адрес. Знайти ймовірність, що хоча б один лист потрапило за призначенням.

3. На лінійці навмання поставлені 2 точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними виявиться більше чверті довжини лінійки?

4. Три стрілка по черзі стріляють по одній і тій же мішені. У кожного стрільця 2 патрона. При першому попаданні стрілянина припиняється. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрільця 0,3, для другого 0,4, для третього- 0,6. Знайти ймовірність того, що всі стрілки витратять весь свій боєзапас.

5. Перше знаряддя 3-гарматної батареї пристреляно так, що ймовірність попадання для нього дорівнює 3/11. Для другого і третього знаряддя вона дорівнює 1/5. Батарея дала залп по цілі. Знайти ймовірність того, що мета вражена. Знайти ймовірність того, що перша гармата потрапило в ціль, якщо

відомо, що мета була вражена. Для ураження цілі достатньо одного попадання.

6. Імовірність прийому окремого сигналу дорівнює 0,05. Радіосигнал передається 5 раз. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа прийнятих сигналів. Побудувати графік функції розподілу. Знайти ймовірність того, що прийнятих сигналів буде не менше 2, але не більше 3.

7. Катет рівнобедреного прямокутного трикутника є випадковою величиною, рівномірно розподіленим на відрізку |0;1|. Знайти щільність розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію площі трикутника. Знайти ймовірність того, що площа перевищує 1/8. Накреслити графіки щільності розподілу і функції розподілу.

8. У відділі працює один співробітник з двома вищими освітами віком 30 років, два співробітника з вищою освітою віком по 50 років і два співробітника без вищої освіти віком до 20 років. Для обраного навмання співробітника знайти спільний розподіл віку і кількості вищих освіт. Обчислити коефіцієнт кореляції між ними.

9. Час очікування автобуса пасажиром має показовий розподіл із середнім значенням 8 хвилин. Знайти кількість поїздок,за яке сумарний час, витрачений на очікування автобуса, не перевищить 5 годин з ймовірністю 0,9.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ за першим моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\theta^6} e^{-x/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним средньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

10,63 19,48 3,89 4,45 15,11 15,90 24,94 1,72 3,25 -3,77 12,17 10,08 14,36 9,39 1,27 7,89 8 , 68 1,59 10,57 3,21 -6,11 15,61 10,82 1,68 5,63 6,79 20.27 -2,15

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має

рівномірний розподіл на відрізку [0: 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

1,64 1,43 0,40 1,23 1,40 0,76 1,09 1,65 1.32

1,24 1,39 0,81 0,39 0,76 1,14 1,24 1,69 1,58

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена за законом Пуассона ($k = 12, \lambda = 0.324$).

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (а =25, σ = 2, α =20, β =27, δ= 1)

15. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = 1/X$, де X - випадкова величина, має щільність розподілу

$f(t) = Ae^{-2|t|}$

Варіант 21

1. Кидають дві гральні кістки. Нехай подія A полягає в тому, що випала сума очок непарна, а подія B в тому, що хоча б на одній з кісток випала трійка. Описати події AB і $\overline{AB}$.

2. В ящику 5 червоних і 4 синіх гудзиків. Яка ймовірність того, що серед чотирьох навмання вийнятих гудзиків будуть і червоні, і сині?

3. Молодий чоловік домовився зустрітися з дівчиною між 9 і 10 годинами і обіцяв чекати її до 10 годин. Дівчина обіцяла чекати його 20 хвилин, якщо прийде раніше. Знайти ймовірність того, що вони зустрінуться. Передбачається, що моменти їх приходу різновірогідні протягом години.

4. При передачі повідомлень в середньому 20% листів не доходять до одержувача. Знайти ймовірність того, що з 6 листів більше половини на буде отримано адресатами.

5. В пункті прокату є 6 однакових на вигляд велосипедів. Імовірність поломки для двох з них по 0,1, для трьох з 0,2 і для одного 0,7. Яка ймовірність того, що велосипед зламається, якщо його обирають навмання?

Яка ймовірність того, що був обраний велосипед, для якого ймовірність поломки 0,7, за умови, що він зламався?

6. Ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,4 при кожному пострілі. Стрілянина ведеться одиночними пострілами до першого попадання, поки не буде витрачений боєзапас. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа вироблених пострілів, якщо боєзапас становить 5 одиниць. Побудувати графік функції розподілу.

7. Випадкова величина ξ - координата точки, що здійснює коливальні рухи по закону $x = a\sin(\omega t)$, і спостерігається у випадковий момент часу T, рівномірно розподілений на періоді коливань $[0;2\pi/\omega]$. Знайти математичне сподівання і стандартне відхилення випадкової величини ξ. Знайти ймовірність того, що $\xi > a/2$.

8. Скласти таблицю спільного розподілу числа випавших парних і непарних чисел при одному підкиданні грального кубика. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Оцінити, скільки разів потрібно кинути гральну кістку, щоб сума випавших очок перевищила 300 з ймовірністю не менше 0,92.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу $f(x)$ знайти оцінки параметра $\theta > 4$ по першому моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок.

Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 2)x^{-\theta+1} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

0,87 1,26 1,58 2,11 0,01 1,35 2,05 0,76 1,65 1,61 0,12 2,03 1,07 1,10 3,06 0,38 0, 64 1.63 0,54 2,65 0,82 1,21 0,73 1,99 2,44 0,93 0,47 0,88

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0;2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0.001.

1,46 0,68 0,59 1,97 1,03 0,62 0,89 1,93 0,88

1,66 1,34 1,99 0,59 0,00 0,46 1,48 1,35 1,74

13. Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичне сподівання Mξ і дисперсію Dξ, якщо випадкова величина розподілена з щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{x-1} e^{-ax}, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases},$$

де a=3, b=5.

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм.(a =30, σ = 2, α =1, β =10, δ= 1.6)

15. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = X^3$, де X - випадкова величина, має щільність розподілу

$$f(t) = \begin{cases} At^2 e^{-\alpha t}, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Варіант 22

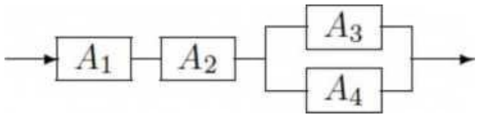
1. Прилад складається з двох блоків першого типу і трьох блоків другого типу. Події: A_k,k = 1,2, справний k-й блок першого типу, B_j, j = 1,2,3, - справний j-й блок другого типу. Прилад справний, якщо справні хоча б один блок першого типу і не менше двох блоків другого типу. Виразити подію C, що означає справність приладу, через A_k і B_j

2. Кидають 4 гральні кістки. Яка ймовірність того, що хоча б на двох з них випаде однакове число очок?

3. Стрижень одиничної довжини AB розламаний в двох навмання вибраних точках *X* і *У*. З якою ймовірністю відстань між цими точками не перевищить довжини відрізка *BY*?

4. Електричне коло складається з елементів A_k, з'єднаних за

наступною схемою:



Ймовірність виходу з ладу кожного елемента A_k дорівнює 0,02. Передбачається, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що ланцюг буде пропускати струм.

5. Однакові деталі надходять на складання з трьох автоматів. Перший автомат дає 25%, другий 30 %, третій 45 % всіх деталей, необхідних для збірки. Брак в продукції першого автомата становить 2,5%, другого - 2 %, третього - 3 %. Знайти ймовірність надходження на збірку небракованої деталі. Знайти ймовірність того, що небракована деталь виготовлена на першому автоматі.

6. За мішені одночасно стріляють три стрілка, імовірності влучень яких дорівнюють відповідно 0,4, 0,7 і 0,9. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа влучень в мішень. Побудувати графік функції розподілу.

7. Максимальний нуль стандартного броунівського руху на [0: 1] має координату ξз функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} A\arcsin\sqrt{x} & \text{при } x \in [0;\ 1]; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти константу A. Побудувати графіки функції розподілу і 'щільності розподілу випадкової величини ξ.

8. Підкидаються три симетричних монети. Скласти таблицю спільного розподілу кількостей випавших гербів на першій монеті і на трьох монетах. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Час очікування поїзда метро за одну поїздку має рівномірний розподіл на відрізку від 0 до 5 хвилин. Оцінити число поїздок, протягом яких сумарний час очікування виявиться менше 1 години з ймовірністю 0,96.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу $f(x)$ знайти оцінки параметра $\theta > 0$ по другому моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^3} e^{-x^2/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

2,50 0,80 0,32 3,31 1,12 3,29 3,87 2,65 2,01 2,65 1,19 -0,85 4,07 1,23
3,38 5,17 1,51 2,20 5,41 1,22 1,89 2,02 3,17 -1,02 2,73 1,10 3,87

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0: 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1: на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,42 1,25 0,87 0,54 0,48 1,20 1,79 0,62 0,75 0,55
0,46 1,02 1,71 1,91 0,83 0,99 1,46 1,09 0,94

13.Знайти характеристичну функцію $\varphi_{\xi}(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичне сподівання Mξ і дисперсію Dξ, якщо випадкова величина розподілена з щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{x-1} e^{-ax}, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases},$$

де a=2, b=4.

14. Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (a =20, σ = 5, α =10, β =14, δ= 2)

15. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = X^2$, де X - випадкова величина, має щільність розподілу

$$f(t) = \begin{cases} At^2 e^{-\alpha t}, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Варіант 23

1. Судно має одне рульовий пристрій, чотири котла і дві турбіни. Подія A

означає справність рульового пристрою, B_k, k = 1,2,3,4 - справність k-го котла, а C_j, j =1,2, - справність j-й турбіни. Подія D - судно керoване, в тому і тільки в тому випадку, коли справний рульовий пристрій, хоча б один котел і хоча б одна турбіна. Виразити D через A, B_k $і$ C_j.

2. У студентській групі 10 юнаків і 15 дівчат. На університетський святковий бал група отримала 5 запрошень, які розігруються за жеребом. Яка ймовірність того, що на бал потрапить хоча б одна дівчина?

3. На відрізку одиничної довжини навмання поставлені дві точки, в результаті чого цей відрізок виявляється розділеним на три частини. Визначити ймовірність того, що довжина всіх трьох одержані частин не перевищує 2/3.

4. На трьох телеканалах частину часу зайнята рекламою: на першому 60 % часу, на другому - 40 %, на місцевому - 30 %. Знайти ймовірність того, що в випадковий момент часу немає реклами хоча б на одному з каналів.

5. Верстат обробляє 2 види деталей A і B, причому час роботи розподіляється між ними в співвідношенні 2: 3. При обробці деталі виду A він працює з максимальною для нього навантаженням протягом 60% часу, при обробці деталі виду B - 90 % часу. У випадковий момент часу верстат працював з максимальним навантаженням. Визначити ймовірність того, що в цей час він обробляв деталь виду A: виду B.

6. Ймовірність влучення баскетбольного м'яча в кільце при киданні початковим спортсменом дорівнює 1/9. М'яч кидають до першого попадання, але дають не більше 6 спроб. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа промахів. Побудувати графік функції розподілу.

7. Сила, що діє на електрон в електричному полі, обчислюється за формулою $F = k/r^2$, де r- відстань від анода - випадкова величина, розподілена рівномірно на $[R;2R]$. Знайти математичне сподівання і стандартне відхилення сили F. Знайти ймовірність того, що ця сила перевищить $k / (2R^2)$.

8. У групі з 20 студентів тільки двоє вивчали в школі французьку мову, і саме вони отримали оцінку «4» на іспиті. З інших студентів 10 осіб отримали оцінку «3», 5 осіб- оцінку «3», і 3 студента отримали «двійки». Скласти таблицю спільного розподілу оцінки на іспиті і індикатора вивчення французского мови для обраного навмання студента. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Число помилок на сторінці книги має розподіл Пуассона з параметром 0,5. Знайти, скільки повинно бути сторінок в книзі, щоб число помилок в ній

не перевищило 200 з ймовірністю 0,75.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ по третьому моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3} e^{-x^3/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

7,16 3,33 7,35 3,05 2,54 1,91 1,77 2,92 5,95 2,31 0,27 5,12 6,60 -1,58 5,42 5,67 6 , 28 -0,09 2,74 2,45 1,11 6,97 -1,59 -1,41 2,69 4,99 7,24 1,75 4,76

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,94 1,42 0,61 2,00 0,59 0,58 1,18 1,58 1,01 0,57

0,05 0,25 0,17 1.30 0,52 0,91 0,84 1,66 1,24

13.Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичне сподівання Mξ і дисперсію Dξ, якщо випадкова величина розподілена з щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{x-1} e^{-ax}, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases},$$

де a=7, b=2.

14.Завод випускає деталі, стандартна довжина яких α мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру α більше ніж σ мм. (a =25, σ= 3, α =8, β =1, δ= 3)

15.Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z=1/X$, де X - випадкова величина, має щільність розподілу

$$f(t)=\begin{cases} A\arcsin\sqrt{t}, t\in[0;1] \\ 0, t>1 \end{cases}$$

Варіант 24

1. Машинно-котельна установка складається з двох котлів і однієї машини. Подія А - справна машина, подія B_k, $k = 1.2$,- справний k-й котел. Подія С означає працездатність машинно-котельної установки, що буде в тому і тільки в тому випадку, якщо справна машина і хоча б один котел. Виразити події C і $\bar{C}$ через A і B_k

2. У компанії з десяти чоловік вирішили зробити один одному подарунки, для чого кожен приніс подарунок. Всі подарунки склали разом, перемішали і випадково розподілили серед учасників. Знайти ймовірність того, що три конкретних людини отримають свій власний подарунок.

3. На лінійці довжиною 20 см випадково зроблені дві насічки. Яка ймовірність того, що відстань від першої насічки до початку лінійки перевершує відстань від другої насічки до початку лінійки більш, ніж на 15 см?

4. Радіосигнал передається послідовно через 3 ретранслятора. На кожному ретрансляторі може виникнути перешкода незалежно від інших ретрансляторів з вірогідністю 0,02, 0,03 і 0,04 відповідно. Знайти ймовірність отримання радіосигналу без перешкоди.

5. Імовірність того, що виріб відповідає стандарту, дорівнює 0,95. На заводі прийнята система з чотирьох незалежних випробувань, кожне з яких виріб, що задовольняє стандарту, проходить з ймовірністю 0,9, а не задовольняють - з ймовірністю 0,4. Яка ймовірність того, що навмання взятий виріб витримає випробування? Яка ймовірність того, що виріб, що витримав випробування, задовольняє стандарту?

6. Імовірність виготовлення нестандартного виробу при налагодженому технологічному процесі постійна і дорівнює 1/9. Для перевірки виробів відділ технічного контролю бере з партії вироби одне за іншим, але не більше 5 виробів. При виявленні нестандартного виробу вся партія затримується. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа виробів, що перевіряються в кожній партії. Побудувати графік функції розподілу.

7. Висота Н. якої досягає кинутий вгору м'яч, визначається за формулою $H = v^2/(2g)$, де v - швидкість, з якою кинутий м'яч, g - прискорення вільного падіння, яке приймемо рівним 10 м $/c^2$. Передбачається, що v - випадкова

величина, розподілена рівномірно на відрізку від 10 до 20 м/с. Знайти щільність розподілу і математичне очікування висоти, досягнутої м'ячем. Знайти ймовірність того, що висота перевищить 15 м.

8. В науковому відділі 3 лабораторії. У першій лабораторії 6 співробітників і 2 дослідних проекту, в другій 8 співробітників і 1 проект, в третій- 4 співробітника і 2 проекту. Знайти спільний розподіл числа співробітників і числа проектів в обраній навмання лабораторії. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Похибка вимірювань довжини кожного з ділянок маршруту розподілена за нормальним законом з нульовим середнім і стандартним відхиленням 5 метрів. Знайти, на скільки ділянок можна розбити маршрут, щоб сумарна похибка не перевищувала по модулю 100 метрів з імовірністю 0,95.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу $f(x)$ знайти оцінки параметра $\theta > 0$ за першим моментом і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta^3\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

-1.07 -0,72 -4,46 -3,24 2,42 -1,70 -1,24 -0,07 6,20 2,67 1,80 0,26 9,61 2,51 1,44 -3,65 5,50 4,17 -2,06 7,48 2,60 7,61 2,54 9,77 9,67 7,36 7,86 11,22 3,38

12, За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0: 2], Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001,

1,06 1,44 0,70 1,33 0,74 0,61 1,03 1,25 0,85

0,81 1,04 0,76 0,80 1,55 1,61 0,82 1,70 1,63

13.Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичне сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$, якщо випадкова величина розподілена з щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{x-1} e^{-ax}, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases},$$

де a=4, b=3.

14.Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (a =35, σ = 1, α =12, β =8, δ= 1.2)

15. Спільний закон розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 задається таблицею. Знайти та побудувати графіки $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$. Перевірити, чи виконуються для даних функцій властивості функції розподілу. Знайти $m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, D_{\xi_1}, D_{\xi_2}$. З'ясувати чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними. Знайти сумісний закон розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ та $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Знайти $m_{\eta_1}, m_{\eta_2}, D_{\eta_1}, D_{\eta_2}$

	$\xi_1 \setminus \xi_2$	-1	0	1
	-1	1/4	1/2	1/16
	1	1/16	1/16	1/16

Варіант 25

1, Кинуті чотири монети, Нехай подія А полягає в тому, що принаймні на двох монетах випав герб, а подія В - в тому, що хоча б на двох монетах випала решка, Описати події АВ, $\overline{AB}$, $\bar{A}$B.

2, В шаховому матчі беруть участь 4 пари шахістів, Імовірність нічиєї в кожній партії дорівнює 1/4, Знайти ймовірність того, що в матчі буде хоча б одна нічия,

3, На відрізку одиничної довжини навмання поставлені дві точки, в результаті чого цей відрізок виявляється розділеним на три частини, Визначити ймовірність того, що довжина кожної з перших двох частин не перевищує 3/5, довжина ж останньої частини більше 1/2,

4, Електричне коло складається з елементів A_k, з'єднаних за наступною

схемою:

Ймовірність виходу з ладу елемента A_k дорівнює. 0,1, Передбачається, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного, Знайти ймовірність того, що що ланцюг не буде пропускати струм,

5, На збірку надходять деталі з чотирьох автоматів, Перший і другий автомати дають по 40 %, а третій і четвертий по 10 % всіх деталей, необхідних для збірки. Брак в продукції першого і другого автомата становить 1%, а третього і четвертого - 4 %. Деталь, виготовлена автоматом, виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на першому автоматі?

6. Імовірність відмови сервера при кожному з незалежних з'єднання через модем дорівнює 0,2. Спроби підключення проводяться до встановлення зв'язку. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа вироблених спроб підключення, якщо число спроб обмежена шістьма. Побудувати графік функції розподілу.

7. Закон Ерланга з щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 e^{-\alpha x} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

описує час очікування приходу трьох викликів в пуассоновском потоці. Знайти коефіцієнт A, математичне сподівання і дисперсію. (Рекомендується використовувати таблиці визначених інтегралів).

8. На 8 картках написані цифри від 1 до 9. Знайти спільний розподіл числа, написаного на обраної навмання картці, і індикатора того, що це число більше трьох. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Кількість води, що витрачається жителями однієї квартири на добу, 8 має показовий розподіл із середнім значенням 100 літрів. Знайти, для якої кількості квартир досить 100 000 літрів води з імовірністю 0,94.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ за першим моментом і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^3} e^{-x/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормального розподілу з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.4,38 -1,10 13,11 10,84 9,45 8,56 7,87 7,34 -4,06 3,48 4,70 7,13 -1,08 4,53 13,56 2, 66 7,29 9,41 11,86 9,54 10,86 2,50 -2,84 11,21 8,93

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,23 0,49 1,12 1,98 0,25 1,52 0,52 0,03 1,10

1,59 0,27 1,30 1,79 1,93 0,23 1,84 1,04

13.Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичне сподівання Мξ і дисперсію Dξ, якщо випадкова величина розподілена з щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{x-1} e^{-ax}, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases},$$

де a=1, b=6.

14.Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (а =35, σ = 1, α =16, β =24, δ= 1)

15.Нехай ξ та η незалежні випадкові величини з щільностями $p_\xi(x,C_1)$ та $p_\eta(x,C_2)$ відповідно (C_1 та C_2 - константи). Знайти значення констант C_1 та C_2. Знайти функції розподілу випадкових величин ξ та η. Знайти функцію розподілу випадкової величини ζ - $\zeta(\xi;\eta)$. Знайти математичні очікування та дисперсії $m_\xi, m_\eta, m_\zeta, D_\xi, D_\eta, D_\zeta$

$\begin{cases} C_1 e^{-2x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\zeta = \zeta(\xi;\eta)$: $\max(2\xi,\eta)$

Варіант 26

1. На відрізку [0,1] навмання ставляться дві точки. Побудувати відповідний простір елементарних фіналів Ω і описати подію А, що означає, що друга точка ближче до правого кінця відрізка [0,1], ніж до лівого, і подія В, що означає, що відстань між двома точками менше половини довжини відрізка, а також подія АВ.

2. Троє жінок і троє чоловіків сідають випадковим чином за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що чоловіки і жінки за столом будуть чергуватися.

3. Випадкова точка А навмання вибирається в прямокутнику зі сторонами 1 і 2. Визначити ймовірність того, що відстань від А до найближчої сторони прямокутника не перевищує 1/3.

4. Імовірність встановлення з'єднання з сервером при кожній спробі дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з'єднання буде встановлено не раніше четвертої спроби.

5. Студент вивчив до заліку тільки 10 питань з 30. Для отримання заліку досить відповісти на два з чотирьох різних питань. Яка ймовірність того, що залік буде отримано? Яка ймовірність того, що студент відповів не менш ніж на три питання, якщо відомо, що він отримав залік?

6. Користувач комп'ютера забув пароль і перебирає навмання 5 можливих. Після чотирьох невдалих спроб комп'ютер блокується. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа спроб. Побудувати графік функції розподілу.

7. Випадкова величина ξ має стандартний логарифмічно нормальний розподіл, якщо $\xi = e^{\eta}$, де η має стандартний нормальний розподіл. Знайти щільність розподілу і математичне сподівання випадкової величини ξ. Знайти ймовірність того, що $\xi > 1$.

8. У двох з чотирьох кімнат температура 25 градусів, а вологість 80 відсотків. У третій кімнаті температура 20 градусів, а вологість 90 відсотків. У четвертій кімнаті температура 25 градусів, а вологість 90 відсотків. Знайти спільний розподіл температури і вологості в обраній навмання кімнаті. Знайти коефіцієнт кореляції між температурою і вологістю.

9. Учасник лотереї кидає кілька куль, кожен з яких може потрапити в лузи з номерами від 1 до 6. Учасник отримує цінний приз, якщо сума очок менше 12. Знайти, при якому числі куль ймовірність отримання цінного призу буде менше 0,01.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ по третьому моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2\theta^3} e^{-x\sqrt{x}/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

5,61 6,70 2,88 9,09 -2,06 6,25 6,46 4,25 16,16 7,07 1,35 13,58 7,96 14,64 -2,14 10,81 2,50 2,24 -1.04 5,31 11,93 16,20 7,49 -5,21 5,90 5,63 7,26

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,64 0,79 0,64 1,06 0,42 0,69 1,65 0,45 0,43

1,48 0,44 0,97 1,49 0,46 1,29 0,37 0,45

13.Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону $n = 15, p = 0.18$

14.Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину Х, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням a , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм.
(а =28, σ= 1, α =20, β=32, δ= 3)

15.Спільний закон розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 задається таблицею. Знайти та побудувати графіки $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(x)$. Перевірити, чи виконуються для даних функцій властивості функції розподілу. Знайти $m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, D_{\xi_1}, D_{\xi_2}$. З'ясувати чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними. Знайти сумісний закон розподілу випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ та $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$.

Знайти $m_{\eta_1}, m_{\eta_2}, D_{\eta_1}, D_{\eta_2}$

	$\xi_1 \setminus \xi_2$	-2	0	1
	-1	1/8	1/4	1/8
	1	1/16	1/16	3/8

Варіант 27

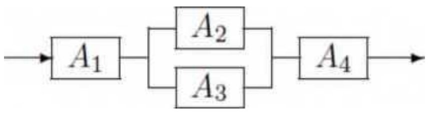
1. З безлічі подружніх пар вибирається одна пара. Подія A = {Чоловікові більше 25 років}, подія B = {Чоловік старший за дружину}, подія C = {Дружині більше 25 років}.

З'ясувати сенс подій: ABC, $A \setminus AB$, $A\bar{B}C$.

2. На відрізку AB навмання вибираються дві точки M і N. Яка ймовірність того, що точка M виявиться принаймні удвічі ближче до точки A, ніж до точки N?

3. Зібралися разом три незнайомих людини. Знайти ймовірність, що хоча б у двох з них збігаються дні народження.

4. Електричне коло складається з елементів A_k, з'єднаних за наступною схемою:



Ймовірність виходу з ладу елемента A_1 дорівнює 0,1, інших елементів A_k- по 0,04. Передбачається, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що ланцюг буде пропускати струм.

5. Прилад складається з чотирьох незалежно працюючих блоків, ймовірності відмови яких за зміну рівні відповідно 0,01, 0,02, 0,03 і 0,04. Ймовірність виходу з ладу приладу при відмові одного з блоків дорівнює 0,8; при відмові більше ніж одного блоку - 1. Визначити ймовірність виходу приладу з ладу за зміну. Знайти ймовірність того, що відмовив один блок, якщо відомо, що прилад вийшов з ладу.

6. При грі з автоматом в разі виграшу гравець отримує 10 рублів. Для участі в грі гравець кидає в автомат 5 рублів. Знайти ймовірність виграшу, якщо математичне сподівання виграшу дорівнює мінус 2 рублям. (В разі програшу сума виграшу вважається негативним числом, рівним сумі програшу, взятої зі знаком «мінус».) Знайти ряд розподілу і дисперсію суми виграшу. Побудувати графік функції розподілу.

7. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини ξ, має вигляд $f(x) = Ae^{-|x-a|}$ (Розподіл Лапласа). Знайти коефіцієнт А, обчислити математичне сподівання і стандартне відхилення. Знайти ймовірність того, що випадкова величина ξ прийме значення, більше 2а.

8. У трьох з чотирьох аудиторій по 20 студентів і рівень шуму 60 децибел, а в четвертій аудиторії немає студентів і рівень шуму 20 децибел. Знайти спільний розподіл числа студентів і рівня шуму в обраній навмання аудиторії. Знайти коефіцієнт кореляції між числом студентів і рівнем шуму.

9. Кількість 10-копійчаних монет, необхідне для видачі кожної здачі в касі, приймає значення від 0 до 4 з рівними можливостями. В касі на початку робочого дня знаходиться 2500 10-копійчаних монет. Знайти, для якої кількості покупців отримання здачі гарантовано з ймовірністю 0,8.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $2 < \theta < 3$ за першим моментом і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta-2} x^{-(\theta-1)/(\theta-2)} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

1,92 12,70 10,80 -10,19 4.32 12,02 13,68 3.75 -0.90 2.94 15,07 2,08 16,22 13,42 1,55 -6,05 15,70 12,35 13,94 -0,56 24,10 7,45 3,60 -0,24 16,84 6,13 -5,28 3,00 10 , 04

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,82 1,13 1,78 0,65 0,55 1,02 0,88 0,76 0,57

1,71 0,62 1.69 0.15 0,23 1,99 1,53 1,91 1,57

13.Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону $n = 6, p = 0.79$

14.Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α, знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм.(a =36, σ = 4, α =28, β =42, δ= 3)

15.Нехай ξ та η незалежні випадкові величини з щільностями $p_\xi(x,C_1)$ та $p_\eta(x,C_2)$ відповідно (C_1 та C_2 - константи). Знайти значення констант C_1 та C_2. Знайти функції розподілу випадкових величин ξ та η. Знайти функцію розподілу випадкової величини ζ - $\zeta(\xi;\eta)$. Знайти математичні очікування та дисперсії $m_\xi, m_\eta, m_\zeta, D_\xi, D_\eta, D_\zeta$

$\begin{cases} C_1 e^{-x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-2x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\zeta = \zeta(\xi;\eta)$: ξ / η

Варіант 28

1. Кинуті три гральні кістки. Нехай подія Л полягає в тому, що випала сума очок непарна, подія В- в тому, що хоча б на одній з кісток випала одиниця, подія С - в тому, що хоча б на одній кістки випала двійка. Описати події: ABC, $A\bar{B}C$, $\bar{A}BC$

2. Номер лотерейного квитка складається з 8 цифр. Яка ймовірність того, що перші чотири цифри парні, а останні чотири- непарні?

3. Випадкова точка А навмання вибирається в прямокутнику зі сторонами 1 і 2. Визначити ймовірність того, що відстань від А до кожної діагоналі прямокутника не перевищує 1/3.

4. Інтервал руху між автобусами маршруту А - 5 хвилин, маршруту Б - 6 хвилин, маршруту В - 10 хвилин. Пасажир приходить на зупинку в випадковий момент часу. Яка ймовірність того, що хоча б один автобус прийде протягом 2 хвилин після приходу пасажира?

5. В дев'яти урнах міститься по 4 білих і 2 чорних кулі, а в одній урні 9 білих і 1 чорна куля. Яка ймовірність, що з урни, взятої навмання, буде витягнута чорна куля? Знайти ймовірність, що куля витягнута з урни з 9 білими і 1 чорною кулею, якщо він виявився чорним.

6. Прилад складається з чотирьох малонадійних елементів. Відмови елементів за деякий період часу незалежні, а їх ймовірності дорівнюють відповідно 0,1; 0,1; 0,2; 0,2. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа відмовили елементів. Побудувати графік функції розподілу.

7. Точка *M* рухається по осі *Ox* згідно із законом $x = at^e$. У випадковий момент часу, рівномірно розподілений на відрізку [0;T], спостерігається положення ξ точки М. Знайти щільність розподілу, математичне сподівання і стандартне відхилення випадкової величини ξ.

8. Чотири поїзди, метро, що йдуть з інтервалом в 4 хвилини, відвезли по 200 пасажирів. Чотири поїзди, що йдуть з інтервалом в 6 хвилин, відвезли по 300 пасажирів. Два потяги, що йдуть з інтервалом в 8 хвилин, відвезли по 100 пасажирів. Знайти спільний розподіл числа пасажирів і інтервалу руху для обраного навмання поїзда. Знайти коефіцієнт кореляції.

9. Кількість бракованих виробів в коробці має розподіл Пуассона з параметром 4. Знайти максимальне число коробок таке, щоб ймовірність знайти в них більше 200 бракованих виробів була менше 0,04.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 4$ по другому моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами.

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 2)x^{-\theta+1} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

14,29 7,48 2,82 22,84 7,49 8,98 13,84 14,17 7,07 9,69 -8,35 12,77 14,93 5,81 8,62 11,22 3 , 85 2,86 9,52 15,93 9,43 19,48 19,19 12,20 19,40 12,09 8,47 6,79

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

1,19 0,91 0,30 1.34 0,61 1,12 1,00 0,53 1,58 0,62

0,41 0,89 1,20 1,51 0,78 1,44 0,46 0,69 1,33

13.Знайти характеристичну функцію $\varphi_{\xi}(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону $n = 6, p = 0.58$

14.Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (a =20, σ = 2, α =3, β =15, δ= 4)

15.Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = 1/X$, де X - випадкова величина, має щільність розподілу

$$f(t) = \begin{cases} A\arcsin\sqrt{t}, t \in [0;1] \\ 0, t > 1 \end{cases}$$

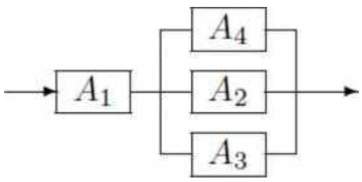
Варіант 29

1. Чи може сума двох подій A і B збігатися з їх добутком? Привести відповідні приклади.

2. В бригаді 4 робочих. Яка ймовірність того, що принаймні двоє з них народилися в один і той же місяць? Вважати, що ймовірності народитися в кожен місяць однакові.

3. Випадкова точка А навмання вибирається в прямокутному трикутнику з катетами 1 і 2. Знайти ймовірність того, що відстань від А до найближчої сторони трикутника не перевищує 1/3.

4. Електричне коло складається з елементів A_k, з'єднаних за наступною схемою:



Ймовірність виходу з ладу елемента A_2 дорівнює 0,01, інших елементів A_k - по 0,1. Передбачається, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що ланцюг буде пропускати струм.

5. Телеграфне повідомлення складається з сигналів «точка» і «тире». Відомо, що серед переданих сигналів «точка» і «тире» зустрічаються щодо

11:10. Через перешкод спотворюється в середньому 30% сигналів «точка» і 20 % сигналів «тире», причому «точка» спотворюється в «тире», а «тире» в «точку». Знайти ймовірність спотворення сигналу. Визначити ймовірність того, що сигнал не був спотворенний, якщо відомо, що прийняли «точку».

6. Два гравці грають в шахи на гроші. Відомо, що в середньому з 10 партій три виграє перший гравець, три закінчуються внічию, і чотири виграє другий гравець. У разі програшу перший гравець платить другому 30 рублів. Скільки він повинен отримувати в разі виграшу, щоб математичне сподівання його виграшу дорівнювало нулю? Знайти ряд розподілу і дисперсію суми виграшу (негативна сума виграшу- це сума програшу, взята зі знаком «мінус»). Побудувати графік функції розподілу.

7. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} & \text{при } |x-a| > 2\sigma; \\ 0 & \text{при} |x-a| \le 2\sigma. \end{cases}$$

Знайти нормується константу A, обчислити математичне сподівання. Побудувати графік щільності розподілу при $a = \sigma = 1$.

8. У під'їзді 5 однокімнатних квартир площею по 40 кв. м., 10 двокімнатних квартир по 60 кв. м. і 5 трикімнатних квартир по 70 кв. м. Для обраної навмання квартири знайти спільний розподіл числа кімнат і площі. Знайти коефіцієнт кореляції між ними.

9. Сумарний час роботи машини складається з інтервалів часу, кожен з яких вимірюється зі стандартним відхиленням в 1 хвилину. Знайти максимальне число інтервалів часу таке, щоб фактичний час роботи відрізнялося від виміряного не більш, ніж на 2 години, з імовірністю 0,95.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ за першим моменту і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність розподілу дорівнює

11. Дана вибірка з нормальним розподілом з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу, підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичному (стандартному) відхиленню, і графік оцінки щільності розподілу.

22,95 -2,61 11,87 1,37 5,92 -5,10 5,38 14,71 7,55 3,91 1,23 8,50 -5,58 -1,97 17,93 9,42 11,99 9,39 4,78 5,43 9,40 8,68 2,20 7,15 14,78 14,77 -15,16

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

1,94 1,96 0,64 0,76 0,01 0,82 0,23 0,82 1,96

1,28 1,49 1,07 1,92 0,17 1,68 1,01 0,48

13.Знайти характеристичну функцію $\varphi_{\xi}(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону $n = 4, p = 0.67$

14.Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (a =10, σ= 1, α =3, β =5, δ= 1)

15.Нехай ξ та η незалежні випадкові величини з щільностями $p_{\xi}(x,C_1)$ та $p_{\eta}(x,C_2)$ відповідно (C_1 та C_2 - константи). Знайти значення констант C_1 та C_2. Знайти функції розподілу випадкових величин ξ та η. Знайти функцію розподілу випадкової величини ζ - $\zeta(\xi;\eta)$. Знайти математичні очікування та дисперсії $m_{\xi}, m_{\eta}, m_{\zeta}, D_{\xi}, D_{\eta}, D_{\zeta}$

$\begin{cases} C_1 e^{-4x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2C_2, x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$	$\zeta = \zeta(\xi;\eta)$: $2\xi + \eta$

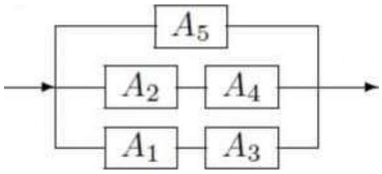
Варіант 30

1. Чи може різниця двох подій збігатися з їх добутком? Привести приклади.

2. В комірчині лежать три різних пари черевиків. Випадково вибираються три черевика. Чому дорівнює ймовірність того, що серед них не буде жодної пари?

3. На лінійці навмання поставлені 2 точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними виявиться менше третини довжини лінійки?

4. Електричне коло складається з елементів A_k, з'єднаних за наступною схемою:



Ймовірність виходу з ладу елемента A_2дорівнює 0,01, інших елементів A_k- по 0,1. Передбачається, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що ланцюг буде пропускати струм.

5. Перше знаряддя 4-гарматної батареї, пристреляна так що ймовірність попадання для нього дорівнює 1/2. Для інших знарядь вона дорівнює 2/5. Батарея дала залп по цілі. Знайти ймовірність того, що мета вражена. Знайти ймовірність того, що перша гармата потрапила в ціль, якщо відомо, що мета була вражена. Для ураження цілі достатньо одного попадання.

6. Імовірність прийому окремого сигналу дорівнює 0,3. Радіосигнал передається 6 разів. Знайти ряд розподілу, математичне сподівання і дисперсію числа прийнятих сигналів. Побудувати графік функції розподілу. Знайти ймовірність того, що прийнятих сигналів буде не менше 2, але не більше 4.

7. Діаметр кола є випадковою величиною, рівномірно розподіленим на відрізку [0; d]. Знайти щільність розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію площі кола. Знайти ймовірність того, що площа перевищує $\pi d^2/32$. Накреслити графіки щільності розподілу і функції розподілу.

8. У відділі працює один співробітник з двома вищими освітами по 13-му розряду, два співробітника з вищою освітою по 12-му розряду, і шість співробітників без вищої освіти за 10-м розрядом. Для обраного навмання співробітника знайти спільний розподіл розряду і кількості вищих освіт. Обчислити коефіцієнт кореляції між ними.

9. Час очікування автобуса пасажиром має показовий розподіл із середнім значенням 9 хвилин. Знайти число поїздок, для якого сумарний час очікування автобуса перевищить 3 години з ймовірністю не більше 0,2.

10. Для вибірки $(X_1, X_2, ..., X_n)$ з розподілу з щільністю розподілу *f(x)* знайти оцінки параметра $\theta > 0$ за першим моментом і методом максимальної правдоподібності. Перевірити спроможність отриманих оцінок. Щільність

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\theta^9} e^{-x/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

розподілу дорівнює

11. Дана вибірка з нормального розподілу з невідомими параметрами. Знайти оцінки параметрів розподілу. Підставляючи замість невідомих параметрів їх точкові оцінки, записати вираз для оцінки щільності розподілу. Побудувати на одному графіку гістограму з кроком, рівним середньоквадратичного (стандартного) відхилення, і графік оцінки щільності розподілу.

9,63 19,48 3,89 4,45 15,11 15,90 24,94 1,72 3,25 -3,77 12,17 10,08 14,36 9,39 1,27 7,89 8 , 68 1,59 10,57 3,21 -6,11 15,61 10,82 1,68 5,63 6,79 20,27 -2,15

12. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про те, що вибірка має рівномірний розподіл на відрізку [0; 2]. Зробити висновок про те, чи приймається ця гіпотеза на рівні довіри 0,1; на рівні довіри 0,01; на рівні довіри 0,001.

0,64 1,43 0,40 1,23 1,40 0,76 1,09 1,65 1,32 1,24 1,39 0,81 0,39 0,76 1,14 1,24 1, 69 1,58

13.Знайти характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ і з її допомогою математичного сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$,якщо випадкова величина розподілена по біноміальному закону $n = 9, p = 0.36$

14.Завод випускає деталі, стандартна довжина яких a мм. Розглянемо довжину деталі як випадкову величину X, розподілену за нормальним законом з середньоквадратичним відхиленням σ та математичним очікуванням α , знайти : 1) ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більше α або/і менше β; 2) ймовірність відхилення довжини деталі від стандартного розміру a більше ніж σ мм. (а =35, σ = 1, α =16, β =24, δ= 1)

15.Нехай ξ та η незалежні випадкові величини з щільностями $p_\xi(x,C_1)$ та $p_\eta(x,C_2)$ відповідно (C_1 та C_2 - константи). Знайти значення констант C_1 та C_2. Знайти функції розподілу випадкових величин ξ та η. Знайти функцію розподілу випадкової величини ζ - $\zeta(\xi;\eta)$. Знайти математичні очікування та дисперсії $m_\xi, m_\eta, m_\zeta, D_\xi, D_\eta, D_\zeta$

$\begin{cases} C_1 e^{-2x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} C_2 e^{-x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\zeta = \zeta(\xi;\eta)$: $\max(2\xi,\eta)$

ПЕРЕЛІК КОНТРОЛЬНИХ ПИТАНЬ

1. Випадкові події, випадковий експеримент, частотне та класичне означення ймовірності, її властивості.
2. Елементи комбінаторики: основна теорема, перестановки, розміщення, сполучення.
3. Аксіоматичне означення ймовірності, операції над подіями, формула додавання ймовірностей.
4. Геометричні ймовірності. Задача про зустріч.
5. Умовна ймовірність. Формула множення ймовірностей. Залежні та незалежні події.
6. Формули повної ймовірності та Байєса.
7. Схема та формула Бернуллі.
8. Поведінка ймовірностей у схемі Бернуллі. Поліноміальна формула.
9. Формула Пуассона, оцінка похибки при її використанні.
10. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа.
11. Дискретні випадкові величини, їх розподіли та числові характеристики.
12. Неперервні випадкові величини: щільність та функція розподілу, їх властивості, числові характеристики неперервних випадкових величин.
13. Початкові та центральні моменти випадкових величин, математичне сподівання та дисперсія, їх властивості.
14. Біноміальний розподіл.
15. Геометричний розподіл.
16. Гіпергеометричний розподіл.
17. Пуассонівський розподіл.
18. Рівномірний розподіл.
19. Показниковий розподіл.
20. Нормальний розподіл.
21. Логістичний розподіл.
22. Розподіл Парето.
23. Функція випадкової величини: розподіл та моменти.
24. Система випадкових величин: задання розподілу, ймовірність попадання в область, маргінальні розподіли, залежність та незалежність випадкових величин.
25. Числові характеристики систем випадкових величин. Коваріація і коефіцієнт кореляції. Функція кількох випадкових величин.
26. Збіжність послідовностей випадкових величин. Нерівність Чебишева та закони великих чисел.
27. Збіжність послідовностей випадкових величин. Центральна гранична теорема.
28. Варіаційний ряд, генеральна сукупність, вибірка та її формування

29. Емпіричні закони розподілу.
30. Точкові оцінки параметрів розподілу.
31. Інтервальні оцінки параметрів розподілу.
32. Критерії згоди.
33. Однофакторний дисперсійний аналіз.
34. Метод лінійних контрастів
35. Кореляційний аналіз.
36. Рівняння лінійної регресії.
37. Перевірка значущості та надійні інтервали для параметрів регресії.
38. Поняття випадкового процесу.
39. Пуассонівський потік.
40. Система масового обслуговування.

ДОДАТОК 1

Таблиця значень функції Гауса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0780	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0574	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0412	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0170
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001

ДОДАТОК 2

Таблиця значень функції Лапласа

$$\hat{O}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

	0	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992

3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997

ДОДАТОК 3

ТАБЛИЦЯ РОЗПОДІЛУ СТ'ЮДЕНТА

Рівень значущості								
Двосторонній Односторонній	0,5 0,25	0,20 0,10	0,10 0,05	0,05 0,025	0,02 0,01	0,01 0,005	0,002 0,001	0,001 0,0005
Число ступенів вільності	Критичні точки							
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,599
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	'2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
31	0,682	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744	3,375	3,633
32	0,682	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
33	0,682	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733	3,356	3,611
34	0,682	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591
36	0,681	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
37	0,681	1,305	1,687	2,026	2,431	2,715	3,326	3,574

38	0,681	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
39	0,681	1,304	1,685	2,023	2,426	2,708	3,313	3,558
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,680	1,296	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
Нескінченність	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

ДОДАТОК 4

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Факультет електроніки

Кафедра Звукотехніки та реєстрації інформації

Розрахункова робота

З кредитного модуля

«Імовірнісні основи обробки даних»

Варіант №

Виконав(ла):

Студент гр. ДВ-61

ПІБ

Перевірив:

ПІБ

Кількість балів_______

Захищено з оцінкою «___________________»

«___» _____________ 2018 р

Київ - 2018